臺北市立中正高級中學 114 學年度第 1 次專任教師甄選【數學科】初選試卷

◎、作答規定

1. 本次考試作答時間為 100 分鐘，鈴響後請停筆由監試人員協助收回題目卷及答案卷。
2. 答案卷以每人一份（共 6 張）為限，單面作答，不得要求增補。
3. 限在作答區內以黑色或藍色原子筆作答，並依答案卷上題號作答，不得擅自更動題號。
4. 答案應以最簡分數或最簡根式回答，計算與教學題的過程，務求詳盡，否則不予計分。
5. 答案卷不得污損、破壞或塗改應試號碼，亦不得書寫考生姓名、應試號碼或與答案無關之文字或符號。
6. 因字跡潦草等原因，致無法辨識或評閱而影響成績者，其後果由考生自行承擔。

一、填充題（每題 5 分）

1. 已知空中有一邊長為$5\sqrt{2}$的正四面體，A為此四面體中距離地面的最近的頂點。而其他三個頂點距離地面距離分別為5、6、7，則A到地面的距離為________。

2. 計算$\displaystyle\prod_{k=2}^{31}\frac{\log_k\left(7^{k^2}\right)}{\log_{k+1}\left(7^{k^2-1}\right)}$的值為________。

3. 有一地球儀為半徑 4 公分的球體，其球心為O。若地球儀表面上有A、B兩點，其中點A位於東經 60 度北緯 45 度、點B位於西經 30 度南緯 45 度，則沿著地球儀表面從點A走到點B的最短距離為________公分。

4. 某人自製一粒六面體骰子並聲稱此骰子出現奇數與偶數的比例相等。今檢定此骰子出現的比例，並列出前三個步驟如下：
   ① 假設「此骰子出現奇數與偶數的比例相等」；
   ② 確立檢定統計量為「此骰子擲 7 次而出現奇數的次數」；
   ③ 設定顯著水準為0.05；
   設隨機變數X表示出現奇數的次數，求拒絕域為________。

5. 設空間中有兩點$A(-1,-2,5)$、$B(1,5,4)$及一直線$L:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{-y}{2}=-z$，若$P$點為$L$上的一個動點，
   當P的坐標為(a,b,c)時，$\overline{PA}-\overline{PB}$會有最大值$d$，則$(a,b,c,d)=$________。

6. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x}{x^3}+\frac{a}{x^2}+\frac{\sin bx}{x}\right)=0$，求$(a,b)=$________。

7. 平面上，一橢圓E的中心為$(0,0)$，且其一焦點為$F(5,0)$。若直線L通過F並交E於A,B兩點。
   若$\overline{AB}$的中點為$M(2,-2)$，求橢圓E的方程式為________。

8. 若方程式$|x^2-4x+3|-a=x$ 恰有 4 個實根，求實數a的範圍為________。

9. 在梯形$ABCD$中$\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$且$\overline{AD}<\overline{BC}$，$\angle D=90^\circ$，$\overline{BC}=\overline{CD}=12$，$E$在$\overline{CD}$上且$\angle ABE=45^\circ$，
   若$\overline{AE}=10$，試求$\overline{CE}$的長度為________。

10. 設$\omega\in\mathbb{C}$、$\omega\neq 1$且$\omega^7=1$，計算$\displaystyle\prod_{k=0}^{6}\left(\omega^{2k}+2\omega^k+4\right)$的值為________。

二、計算與教學題（除第 6 題 10 分外，其餘每題 8 分）

1. 若排除以數學軟體或是描點法的方式，如何在不超出課綱規範下，向學生解釋 $y=2^x$ 的函數圖形恆在直線 $y=x$ 上方。

2. 已知實數 x,y 滿足 $2xy(x^2-y^2)=x^2+y^2, x\neq 0$，求 x^2+y^2 的最小值。

3. 已知平面上兩向量 $\overrightarrow{a}=(\cos\frac{3x}{2},\sin\frac{3x}{2})$, $\overrightarrow{b}=(\cos\frac{x}{2},-\sin\frac{x}{2})$，且 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$。

若 $f(x)=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}-2\lambda|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|$ 的最小值為 $\frac{-11}{2}$，求實數 λ。

4. 數列 $\langle a_n\rangle$ 的前 n 項總和為 S_n，已知 $\begin{cases} a_1=1 \\ S_{n+1}=4a_n+2 \end{cases}$，求一般項 a_n。**(整理計算或歸納證明之)**。

5. 設 P 為正方形 $ABCD$ 之外接圓上的一點，其滿足 $\overline{PA}\cdot\overline{PC}=75$，$\overline{PB}\cdot\overline{PD}=100$，求正方形 $ABCD$ 的面積。

6. 以下是 108 課綱高二社會組數學 B 課程的習作題目，以及甲、乙兩生的作圖與計算過程。
請你想像自己是這門課的老師，批改這兩位學生的作答，並說明：

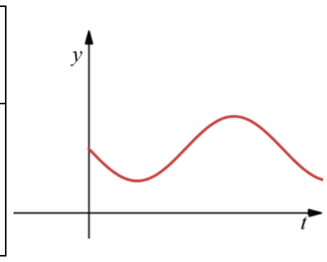
① 兩位學生的作法有哪些錯誤？假設這兩位學生在下課時同時向你詢問為何錯誤及如何訂正，你會如何簡要說明，讓社會組數學 B 課程的學生能夠立刻理解？

② 在你的教學經驗中，這類的題目還有哪些計算錯誤的樣態？

習作題目：

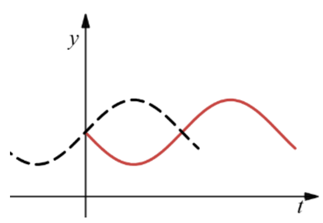
某實驗室以示波器記錄一波在介質中前進時，波隨時間 t（秒）的振動高度 y（公分）如下表。

時間	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
高度	4	3	$4-\sqrt{3}$ ≈ 2.27	2	$4-\sqrt{3}$ ≈ 2.27	3	4	5	$4+\sqrt{3}$ ≈ 5.73	6	$4+\sqrt{3}$ ≈ 5.73	5	4



將這些資料點繪製於坐標平面上並連結起來，觀察其圖形如右圖，可約略看出此圖形與正弦波類似，因此該實驗室選用 $y=a\sin(\omega t+\phi)+k$ 的函數來描述這筆觀測資料，其中 $a>0$、$\omega>0$、$-\pi<\phi\le\pi$。試求：$y=a\sin(\omega t+\phi)+k$。

甲生的作圖與計算過程：

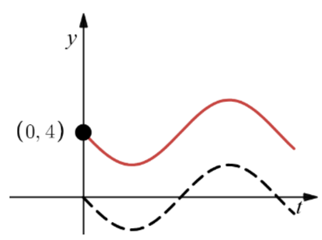


$\because$ 最大 $=6$，最小 $=2\Rightarrow$ 上移 2 單位，鉛直伸縮 6 倍，$\therefore a=6$，$k=2$。

$\because t=0$ 跟 6 重複，週期 $T=6\Rightarrow$ 水平伸縮 $\frac{6}{2\pi}=\frac{3}{\pi}$ 倍，$\therefore \omega=\frac{3}{\pi}$。

$\because$ 由圖知右移 6 單位，$\therefore \phi=-6$，$\therefore \underline{\underline{y=6\sin(\frac{3}{\pi}t-6)+2}}$ #

乙生的作圖與計算過程：



$\because$ 最大 $=6$，最小 $=2\Rightarrow$ 振幅 $=a=6-2=4$

$\because$ 上移 4 單位 $\Rightarrow k=4$

$\because$ 過 12 秒數值重複，週期 $T=12\Rightarrow \omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$

$\therefore y=4\sin(\frac{\pi}{6}t+\phi)+4$，$\because$ 過 $(0,4)$ 代入，$\therefore 4=4\sin(\frac{\pi}{6}\cdot 0+\phi)+4\Rightarrow 0=\sin\phi\Rightarrow\phi=0$，$\therefore \underline{\underline{y=4\sin(\frac{\pi}{6}t)+4}}$ #