臺中市立豐原高級中等學校 114 學年度第 1 次教師甄選數學科試題卷

第一部分：填充題
說明：
(1) 本部分為填充題，共 16 題，每題 5 分，請將答案化成最簡，否則不予計分。
(2) 請依題號將答案填入答案卷欄位作答區中，否則不予計分。

1. 已知多項式 $f(x)$ 除以 $(x+1)^4$ 的餘式為 x^3-1，則 $xf(x)$ 在 $x=-1$ 的一次近似（一次估計）為__________。

2. 四邊形 $ABCD$ 中，$\angle BAD$ 為直角、$\overline{AC}=\overline{AD}$，$\overline{BC}=8$，$\overline{BD}=10$。設 M 為 $\overline{BC}$ 中點，則 $\overline{AM}$ 長為__________。

3. ΔABC 中，已知 $\overline{AB}=\overline{AC}=13$，$\overline{BC}=10$。設 P 為 ΔABC 內部一點，滿足 $\overline{PB}=8$ 且 $\overline{PC}=6$，則 ΔPAB 面積與 ΔPAC 面積的比值為__________。

4. 設 $z=a+bi$，其中 a,b 皆為正實數，$i=\sqrt{-1}$。已知 1、z、z^2、z^3 在複數平面上所對應的點依序為 A、B、C、D，且 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 P 點。若 $\overline{PC}=2\overline{PA}$，$\overline{PD}=5\overline{PB}$，則數對 $(a,b)=$__________。

5. 坐標平面上，給定圓 $C: x^2+y^2=9$ 及一點 $A(-5,0)$。過 A 點作圓 C 的兩切線得切點分別為 B、C。

   設 P 點滿足 $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AC}$（其中 $k>0$），則當 $k=$__________時，$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{BP}}$ 有最大值。

6. 設 a,b 為實數，若三次多項式 $f(x)$ 的最高次項係數為 1，$f(0)=f(a)=f(b)=-13$，且 $f(x)$ 的對稱中心為 $(3,-15)$，則 $a\cdot b$ 值為________。

7. 在坐標平面上，點 Q 坐標為 $(6,8)$。考慮二階方陣 $A=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & -3\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ 所定義的線性變換。對於平面上異於原點 O 的點 P_1，設 P_1 經 A 變換成 P_2，P_2 經 A 變換成 P_3。若 $\Delta P_1P_2P_3$ 的面積為 9，則 $\overline{QP_1}$ 最大值為__________。

8. 若二次方程式 $ix^2-(i+1)x+\lambda=0$，($i=\sqrt{-1};\lambda\in R$) 有兩個虛根，則 λ 的範圍為__________。

9. 有一非等腰三角形 ΔABC 的內心為 I，直線 $\overleftrightarrow{BI}$、直線 $\overleftrightarrow{CI}$ 分別交 $\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 於 D、E 兩點，若 $\overline{BC}=6$，且 $\overline{IE}=\overline{ID}$，則 ΔABC 的外接圓半徑長為________。

10. 有一數列 $\langle a_n\rangle$ 每項都是正實數，且滿足

$$a_1=\frac{1}{2}\quad ,\ a_n=2(a_{n+1})^2-1\quad (n\geq 1),$$

   則 $\lim_{n\to\infty}4^n(1-a_n)=$________。

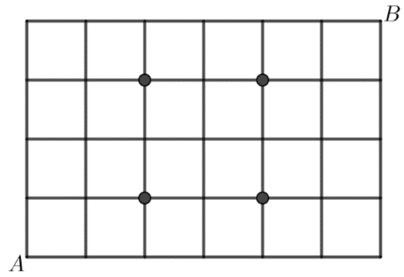
11. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sqrt{16n^2-1^2}+\sqrt{16n^2-3^2}+\sqrt{16n^2-5^2}+\cdots+\sqrt{16n^2-(2n-1)^2}\right)$ 的值為__________。

12. 甲、乙、丙、丁四人玩傳球遊戲，規定每次必須將球傳給其他三人的其中一人，且每人接到球的機會均等。若一開始球在甲手上，設n次傳球後，球在甲手上的機率為P_n，則$\log_9(4\cdot P_{114}-1)$的值為________。

13. 空間中有一四角錐 $E\text{–}ABCD$，其中底面 $ABCD$ 為矩形，ΔAED為正三角形，且平面 EAD 與平面 $ABCD$ 垂直。設 G, F 分別為 $\overline{AD},\overline{CD}$ 中點，且 $\angle EBG=30^\circ$，若 A 到平面 EFB 的距離為 2，則 $\overline{AD}=$_______ 。

14. 級數$\sum_{k=1}^{90}k^2\times C_k^{90}\times 2^{90-k}$ 的和為________位數。(參考數值：$\log 2\approx 0.3010, \log 3\approx 0.4771, \log 7\approx 0.8451$)

15. 如右圖從A出發走捷徑到B，假設走每條捷徑的機會均等，則經過圖中「●」個數的期望值為_________個。



16. 設$\theta_1,\theta_2,\theta_3,\cdots,\theta_{2025}$皆為銳角，且$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\sin^2\theta_3+\cdots+\sin^2\theta_{2025}=1$，

則$\dfrac{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3+\cdots+\sin\theta_{2025}}{\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3+\cdots+\cos\theta_{2025}}$的最大值為___________。

第一部分：計算證明題 說明： (1) 本部分為計算證明題，共 2 題，每題 10 分，每題配分於題後。 (2) 請依題號作答並附上計算過程，否則不予計分。

1. 坐標平面上有一圓 C: $x^2+y^2=20$ ，試回答下列問題:

(1)拋物線Γ_1與圓 C 相切於 $A(-\sqrt{10},\sqrt{10})$和 $B(\sqrt{10},\sqrt{10})$兩點, 求拋物線Γ_1的方程式為何? (5 分)

(2)拋物線Γ_2與圓 C 相切於 $D(2,4)$和 $E(-4,2)$兩點, 求拋物線Γ_2的頂點坐標為何? (5 分)

2. 如右圖，設ΔABC為銳角三角形，H 為ΔABC三高$\overline{AD}$，$\overline{BE}$，$\overline{CH}$ 的交點，

試證：$\dfrac{\overline{AH}}{\overline{DH}}=\dfrac{\cos A}{\cos B\cos C}=\tan B\tan C-1$。