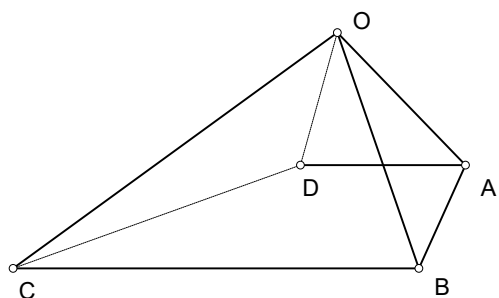


一、填充題：84 分(每格 6 分)

1. 已知兩質數 p 、 q 滿足 $10^n < p < q < 10^{n+1}$ ，又 $pq^2 = 1394542162859$ ，則正整數 n 的值為_____。
2. 已知 $\triangle ABC$ 的三邊長為連續三個正整數，且最大角是最小角的 2 倍，則 $\triangle ABC$ 的面積為_____。
3. 空間中，設 $\triangle ABC$ 的三邊長 $\overline{AB} = 3$ 、 $\overline{AC} = 5$ 、 $\overline{BC} = 7$ ，另有一點 P 滿足 $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC} = \frac{25\sqrt{3}}{3}$ ，則錐體 $P-ABC$ 的體積為_____。
4. 試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{3n}} \right) =$ _____。
5. 平面上，設點 P 是 $\triangle ABC$ 內部一點，且直線 AP 交 \overline{BC} 於 D ，已知 $\triangle BPC$ 、 $\triangle CPA$ 、 $\triangle APB$ 之面積比為 7:8:9，又 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，則數對 $(x, y) =$ _____。
6. 數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足遞迴關係式 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{n}{n+2} a_n, n \text{ 是正整數} \end{cases}$ ，則 $\sum_{n=1}^{100} a_n =$ _____。
7. 設 f 為實數系上的連續函數，若 $\frac{d}{dx} \int_{-x}^x f(t) dt = x^2 + 1$ ，則 $\int_{-1}^1 f(x) dx =$ _____。
8. 用面積為 1 的小正方形湊成一個邊長為 n 的大正方形，若用同樣數量的小正方形可以拼湊成 28 種長方形（長、寬互換視為同一種），則 n 的最小值為_____。
9. 設甲袋中有 5 顆白球、2 顆黑球，乙袋中有 3 顆白球，先自甲袋中任取 4 顆球放入乙袋，再從乙袋中任取 5 顆球放入甲袋，完成這樣的動作稱為一局。已知每顆球抽到的機會均等，第一局結束時，在甲袋中有黑球的條件下，過程中從甲袋取得 2 顆白球、2 顆黑球放入乙袋的機率為_____。

臺北市立景美女子高級中學 114 學年度第 1 次正式教師甄選 數學科 初試題目卷

10. $\triangle ABC$ 中， D 是 \overline{AB} 的中點， E 是 \overline{AC} 上一點，且 $\overline{AE} = 2\overline{EC}$ ， $\overline{AB} = 1$ 。若 \overline{CD} 與 \overline{BE} 交於 P 點，且直線 AB 、直線 AC 剛好都是 $\triangle BCP$ 外切圓的切線，則 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ _____。
11. 已知 $a > 1$ ，且在坐標平面的第一象限有 A 、 B 兩點分別在 $y = a^x$ 及 $y = \log_a x$ 上，使得正三角形 OAB 的邊長為 $2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}$ ，其中 O 為原點，則 $a =$ _____。
12. 如圖，在四角錐 $O-ABCD$ 中， $\overline{AD} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{AD} = 2$ ， $\overline{BC} = 4$ ， $\triangle OAB$ 與 $\triangle OAD$ 均為正三角形，若平面 OAD 與平面 ODC 的兩面角為 θ ，則 $\cos \theta =$ _____。



13. 設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 皆為實係數二次多項式且首項係數都是 2，已知 $(f(x))^2$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $5x+3$ ，而 $(g(x))^2$ 除以 $f(x)$ 的餘式為 $x+1$ ，則 $f(x) + g(x) =$ _____。
14. 坐標平面上，設點 $O(0,0)$ 、 $A(1,0)$ 、 $B(0,1)$ ，對於所有在 $\triangle OAB$ 內部及邊界上的點 $P(x,y)$ ：若 $|x-y| > 0$ ，則以 P 為圓心， $\frac{1}{2}|x-y|$ 為半徑作一圓，並蒐集圓上及圓內的所有點；若 $|x-y| = 0$ ，則僅蒐集此點 P 。對於所有在 $\triangle OAB$ 內部及邊界上的點 P 都進行上述作圓（有無限多個圓）及蒐集圓上及圓內的所有點，令 R 為所有被蒐集到的點所形成的區域，則區域 R 的面積為_____。

二、計算題：16 分(第 1 題 10 分，第 2 題 6 分)

1. 高一某班共 35 人，某次數學考試含選擇題（共 40 分）與填充題（共 60 分），設全班選擇題與填充題分數的算術平均數分別為 30 分、35 分，標準差分別為 4 分、5 分。已知全班每人數學考試總分的標準差為 8 分，試求選擇題與填充題的相關係數。
2. 坐標平面上，有一橢圓 $\Gamma_1 : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ 。以原點 $O(0,0)$ 為中心，將橢圓 Γ_1 逆時針旋轉 $\frac{\pi}{3}$ 後，得橢圓 $\Gamma_2 : 43x^2 + 14\sqrt{3}xy + 57y^2 = 576$ ，試求橢圓 Γ_1 的面積。