

臺北市立陽明高級中學 114 學年度正式教師甄選高中數學科教師甄試試題卷

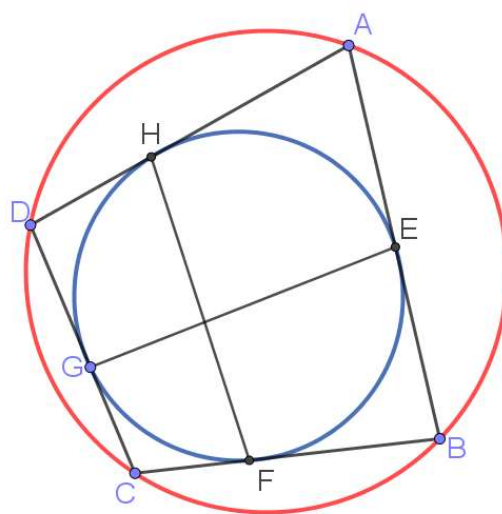
一、填充題（合計 12 題，每題 5 分）

1. 設 x 、 y 均為整數，則 $(x+y+2027)^2 = x^2 + y^2 + 2027^2$ 有 _____ 組整數解？
2. 滿足 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{n-1}{n}$ ，其中 x 、 y 、 n 為自然數，且 $x < y$ ，例如： $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ ，則 $x=2$ ， $y=3$ 為一組解，以 $(2,3)$ 表示。
請問此方程式的所有解為 _____。
3. 在空間中，已知平面 $E: x+2y+2z=9$ 與球面 $S: x^2+y^2+z^2=16$ 交於一圓。若球面 S 被平面 E 切成兩塊，求容積較小那一塊的容積為 _____。
4. 試求由 $y=x-x^2$ 及 $y=0$ 所圍成的區域繞著 $x=2$ 旋轉所得實體之體積為 _____。
5. 在坐標空間中， xz 平面上有一直線 $L: \sqrt{3}x-z-6=0$ ，將此直線繞 z 軸旋轉得到一個直圓錐面，此圓錐面和 xy 平面圍成一個圓錐體。現將一球塞進此圓錐體中，則此球面半徑最大時的球心坐標為 _____。
6. 現有八枚相同的硬幣，每次至少取 1 枚，一直到取完為止。設每一種取法的機率相等，則在已知第二次取 3 枚的情況下，總共取了四次才取完的條件機率為 _____。（化為最簡分數）
7. 橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上相異三點 $P(x_1, y_1)$ 、 $Q(4, \frac{9}{5})$ 、 $R(x_2, y_2)$ 分別至焦點 $F(4, 0)$ 的距離成等差數列，求 $x_1 + x_2 =$ _____。
8. 一個正十七邊形的頂點 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{17}$ 皆落在單位圓 C 上，點 $P(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ 為圓 C 上一點，試求 $2(\overline{PA_1} + \overline{PA_2} + \dots + \overline{PA_{17}}) =$ _____。
9. 方程式 $2x^6 - 3x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 2 = 0$ 的六個根中，落在複數平面第一象限之所有根的總和為 _____。
10. 設 $p = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2025^2} + \frac{1}{2026^2}}$ ，則 $p =$ _____。
11. 設 $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{4\cos x + 5}}$ ，其中 $x \in R$ ，試求 $f(x)$ 的值域為 _____。
12. 試求滿足 $\log_{(x+y)} y < \log_{(x+y)} \sqrt{1-x^2}$ 之所有點 (x, y) 所形成圖形的面積為 _____。

【背面尚有試題】

二、計算題（合計 4 題，每題 10 分）

1. 已知由 $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ 及 $g(x) = -x + 5$ 兩圖形所圍成之封閉區域 A，若作直線 L 垂直 x 軸，分別與封閉區域 A 的邊界交於 P、Q 兩點，求在封閉區域內的 \overline{PQ} 長之最大值為何？
2. 設 a、b、p、q 均為實數，如果對任何的實數 x 而言，等式 $(2x+1)^{20} - (ax+b)^{20} = (x^2 + px + q)^{10}$ 都能成立，則數對 $(b^{20}, p, q) = ?$ （已知 $2^{20} = 1048576$ ）
3. 已知一個圓內接四邊形 ABCD 中可找到一個內切圓，且 E、F、G、H 四點分別為此四邊形 ABCD 與其內切圓相切的四個切點（如圖所示），若 $\overline{FG} = 6$ 、 $\overline{EF} = 7$ 、 $\overline{EH} = 8$ ，求 \overline{GH} 的長度為何？



4. 小明在一本書上看到一道試題如下：

已知 x 、 y 、 p 、 q 為實數，並且滿足 $2x^2 + 3p^2 = 2y^2 + 3q^2 = (xq - yp)^2 = 6$ ，求 $(x^2 + y^2)(p^2 + q^2)$ 的值。

因小明無法知道該題的解法，因此求助於任課老師，請您以學生在中學階段學過的數學概念出發，提供小明至少 4 種解法。