

# 國立嘉科實驗高級中學

## 114學年度國中部教師甄選

### 數學科 試題

#### 作答注意事項

1. 本試題共兩部分：測驗題及非選擇題，共計 100 分。
2. 選擇題請用 2B 軟心鉛筆在答案卡劃記，非選擇題限用藍色、黑色原子筆或鋼筆在答案本上作答，但繪圖時得使用黑色鉛筆。
3. 本科不可以使用電子計算器。

全  
部  
試  
題  
用

一、單選題：(每題 4 分，共 20 分)

1. (B) 拋物線  $y = ax^2 + bx + c$ ，頂點為  $(3, 2)$ ，已知係數  $a, b, c$  成等比，則  $a$  值為何？

(A)  $\frac{4}{9}$  (B)  $\frac{2}{27}$  (C)  $\frac{4}{81}$  (D)  $\frac{8}{81}$

2. (B) 如圖 (一)， $\triangle ABC$  中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\overline{AB}$  上有兩點  $E$  與  $F$ ，使得  $\overline{AE} = \overline{AC}$ ， $\overline{BC} = \overline{BF}$ 。若  $\angle FCE = x^\circ$ ，下列哪一個選項正確？

(A)  $x = 30$  (B)  $x = 45$   
(C)  $30 < x < 45$  (D)  $x = 60$

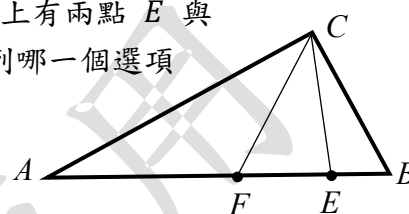
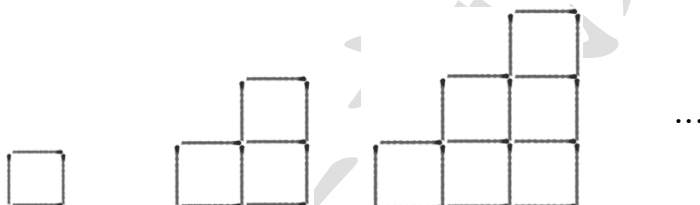


圖 (一)

3. (B) 小明利用火柴棒排出有規律的圖案如下：



第 1 個圖案

第 2 個圖案

第 3 個圖案

...

第 100 個圖案

要排出第 1 個圖案，共需要 4 根火柴棒；要排出第 2 個圖案，共需要 10 根火柴棒；要排出第 3 個圖案，共需要 18 根火柴棒...。請問，小明要排出第 100 個圖案，共需要幾根火柴棒？

(A) 10288 (B) 10300 (C) 10308 (D) 11308

4. (D) 若  $\alpha, \beta$  為方程式  $x^2 - 3x - 1 = 0$  之兩根，則  $(\alpha^5 + \beta^5) - 3(\alpha^4 + \beta^4)$  之值為多少？

(A) 1 (B) 9 (C) 33 (D) 36

5. (C) 小寬的冰箱中有 3 顆相同的巧克力及 3 個相同的布丁，共 6 個點心。小寬決定在下星期的五天內(星期一至星期五)將點心吃完，從星期一起每天至少吃一個點心，直到冰箱內的巧克力及布丁吃完為止。

星期一的第一個點心從冰箱隨機選擇一個點心，吃完後，小寬接著再隨機選下一個點心，可繼續吃或等到隔天第一個吃。若選擇隔天再吃，當日就不再吃點心，剩下的點心都採用這個原則。不過，若星期五當天如果還有點心剩下兩個以上，則吃完第一個點心後，剩下的隨機一個一個依序吃完。

例如：三天吃完→巧布巧 布 布巧，或五天吃完→巧 巧 布 布 布巧。

根據這個原則，小寬點心吃完不同的順序方法有幾種？

- (A)31 (B)32 (C)620 (D)640

## 二、填充題：(每題 6 分，共 42 分)

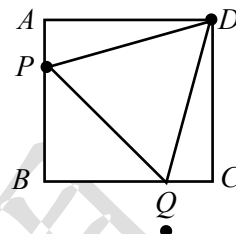
1. 一個「四次方」正立方體骰子，是指六個面分別刻上「 $1^4$ ,  $2^4$ ,  $3^4$ ,  $4^4$ ,  $5^4$ ,  $6^4$ 」數字的正六面體骰子。小明每次同時投擲一枚「紅色的『四次方』正立方體骰子」和一枚「藍色的『四次方』正立方體骰子」。每次投擲完畢後，計算「紅色骰子獲得的數字除以藍色骰子獲得的數字」的結果，所得之「商」為整數的機率為  $\frac{7}{18}$ 。

2. 坐標空間中，若兩直線  $L_1 : \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{2}$  與  $L_2 : \frac{x+2}{2} = \frac{y+14}{3} = \frac{1-z}{-1}$ ，則由  $L_1$ 、 $L_2$  所決定的平面方程式為  $x - 2z + 4 = 0$ 。(以一般式表示)

3. 小美做實驗，獲得一組數據  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，這組數據的算術平均數為 15，標準差為 5。小美想針對這組數據進行調整，他決定將改變後的數據與原先的數據變成以下的線性關係式： $y_i = -x_i + 70$ ,  $i=1, 2, 3, \dots, n$ ，則新數據  $y_1, y_2, \dots, y_n$  的算術平均數與標準差的和為 60。

4. 設  $S$  是由所有正整數  $1, 2, 3, \dots, 2000, \dots$  所形成的集合，  
 即  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 2000, \dots\}$ 。若  $S'$  為  $S$  刪除「完全平方數」後，剩下的  
 這些數所形成的集合，則該集合  $S'$  中，由小到大的第 2025 項為 2070。  
 (註： $1^2=1$  視為完全平方數)

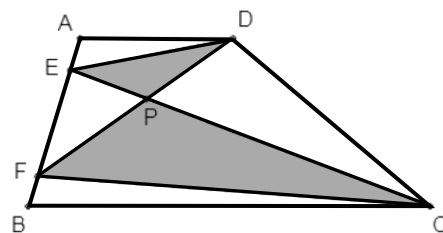
5. 如圖(二)。四邊形  $ABCD$  為正方形，若  $P, Q$  兩點分別在  $\overline{AB}, \overline{BC}$  上，使得  $\triangle DPQ$  為正三角形，且  $\overline{DP} = 1$ 。則正方形  $ABCD$  的面積為  $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ 。



圖(二)

6. 若  $A(12,0)$ 、 $B(0,5)$ ， $O$  為原點， $P$  為  $\triangle OAB$  內部一點，自  $P$  點作  $\overline{AB}$  之垂線，垂足為  $C$  點，若  $\overline{OP}^2 + \overline{PC}^2$  有最小值  $k$ ，則  $k = \frac{1800}{169}$ 。

7. 如圖(三)，梯形  $ABCD$  中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，已知  $\overline{AE} = \overline{BF}$ ，  
 梯形  $ABCD$  面積為 48， $\triangle CDP$  面積為 13，則  $\triangle PDE$  與  $\triangle PCF$  之面積和為 22。



圖(三)

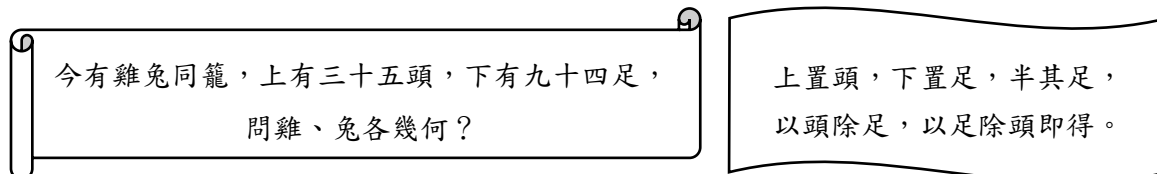
### 三、計算題：(每題 7 分，共 14 分)

1. 一個邊長大於 3 的凸  $n$  邊形，它的  $n$  個內角滿足下列兩個條件：
- ① 第 2 個內角比第 1 個內角大  $20^\circ$ ，第 3 個內角比第 2 個內角大  $20^\circ$ ， $\dots$ ，  
 第  $n$  個內角比第  $(n-1)$  個內角大  $20^\circ$ 。
  - ② 此凸  $n$  邊形最小角的角度是  $40^\circ$ 。
- 試求  $n$  值。

2. 試求滿足  $2026x + 115y = 1$ ，且  $0 < y < 1000$  的所有整數解  $(x, y)$ 。

#### 四、數學教材教法申論：(第 1 題 10 分，第 2 題 14 分，共 24 分)

1. 《孫子算經》是中國古老的數學書之一，其下卷的內容提及一道數學問題如下圖（四）。並且，該書也提出一個解題策略如下圖（五）：



圖（四）：《孫子算經》中的代數問題

圖（五）：《孫子算經》中的解答

- (1) 請針對上圖（五）提到的解題策略，說明其意涵並解出答案。(2 分)
- (2) 針對本道問題，請列出代數式並進行解題。(2 分)
- (3) 將數學史融入課程並進行教學，藉此活化課室學習氛圍、拉近數學與學生的距離、提升學生對數學的熱情以及學習數學的自信心，是《十二年國民教育數學領域課程綱要》的基本理念之一，也讓「數學史」在我國數學領域課程綱要中尋得一席之地。
- 請針對國民中學數學領域的範疇，提出一個「將數學史融入課程設計」的案例，並說明此案例為何能夠活化課室學習氛圍、拉近數學與學生的距離、提升學生對數學的熱情或學習數學的自信心？(6 分)
2. 「三角形的外心」是學習三角形「五心」時的重要概念，傳統教學常使用尺規作圖來定義與尋找外心，而現今動態幾何軟體（例如：GeoGebra，簡稱 GGB）也提供了強大的視覺化與探究工具。
- 請針對「三角形的外心」這個單元，闡述您的教學設計理念與實踐規劃，內容應包含：
- (1) 教學工具的觀點與應用：請比較並闡述，在教導「外心」概念（包含定義、性質與找法）時，您認為傳統的尺規作圖與使用動態幾何軟體（GGB）各有哪些教學上的優點與限制？(3 分)
- (2) 教學脈絡設計：請說明您規劃的教學步驟或流程。如何引導學生理解外心的定義、學習找出外心的方法（使用您選擇的工具），探索並驗證其「到三頂點等距」的核心性質，以及外心位置與三角形類型（銳角、直角、鈍角）的關係？(4 分)
- (3) 預期的學生迷思與因應：根據您的教學經驗，學生在學習「外心」時，最可能產生哪些迷思概念或操作上的困難？(請列舉三項) (3 分)
- (4) 活動設計：針對這些預期的迷思或困難，您會設計哪些具體的教學活動或提問來幫助學生釐清觀念、克服困難，並深化對外心概念的理解。(4 分)