

國立嘉科實驗高級中學

114學年度高中部教師甄選

數學科 試題

作答注意事項

1. 本試題共一部分：非選擇題，共計 100 分。
2. 選擇題請用 2B 軟心鉛筆在答案卡劃記，非選擇題限用藍色、黑色原子筆或鋼筆在答案本上作答，但繪圖時得使用黑色鉛筆。
3. 本科不可以使用電子計算器。

武豐分館

一、填充題（每題 7 分，共 56 分）

1. 若 $\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} = \frac{1}{7}$ ， a, b, c 為質數，則 $a^2 + b^2 + c^2 =$ _____。

參考答案：83

2. 設拋物線 $\Gamma: y = x^2 - kx + k$ 與 x 軸交於 $(a, 0)$ 與 $(b, 0)$ 兩點，其中

$0 < a < b$ 。 Γ 在第一象限與 x 軸、 y 軸所圍區域的面積為 R_1 ， Γ 在第四象限與 x 軸所圍區域的面積為 R_2 。若 $R_1 = R_2$ ，且 k, a, b 為實數，求 $(k, a, b) =$ _____。

參考答案： $(\frac{4}{3}, 4, \frac{16}{3})$

3. 已知 $\begin{cases} \tan \alpha + \log_3(3 \tan \alpha + 6) = 2 \\ \tan \beta + 3^{\tan \beta - 1} = 4 \end{cases}$ ，求 $\tan \alpha + \tan \beta =$ _____。

參考答案：2

4. 有一質點在實數線上跑來跑去，它由 $O(0)$ 跑至 $A_1(1)$ ，稱為第一次，再由 $A_1(1)$ 回頭跑至 $A_2(\frac{1}{3})$ ，稱為第二次，再由 $A_2(\frac{1}{3})$ 回頭跑至 $A_3(\frac{7}{9})$ ，稱為第三次，再由 $A_3(\frac{7}{9})$ 回頭跑至 $A_4(\frac{13}{27})$ ，稱為第四次，...，依此類推持續跑來跑去，若第 101 次後，它會停在距原點 $\frac{[q^r + (q-1)^r]}{p \times q^{r-1}}$ 處，其中 p, q, r 為相異正整數，則有序數對 $(p, q, r) =$ _____。

參考答案： $(5, 3, 101)$

5. 若複數 z 滿足 $\left| \frac{z^2+1}{z+i} \right| + \left| \frac{z^2+4i-3}{z-i+2} \right| = 4$ ，則 $|z-1|$ 的最小值為_____。

參考答案： $\sqrt{2}$

6. 可星和予熹兩人進行某項比賽，約定每局必分出勝負，勝者得 1 分，負者得 0 分，比賽進行到有一人比對方多 2 分或打滿 8 局時停止。設可星在每局中獲勝的機率為 $\frac{3}{4}$ ，且各局勝負為獨立事件，求比賽停止時，比賽局數的期望值為_____。

參考答案： $\frac{803}{256}$

7. 平面向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 滿足 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$ ，若 $\vec{a} - \vec{c}$ 與 $\vec{c} - \vec{b}$ 的夾角為 $\frac{\pi}{3}$ ，求 $|\vec{c}|$ 的最大值與最小值的總和為_____。

參考答案： $\sqrt{3}$

8. 已知集合 $S = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{13}, \frac{1}{17}, \frac{1}{25} \right\}$ 共有 127 個非空子集合，

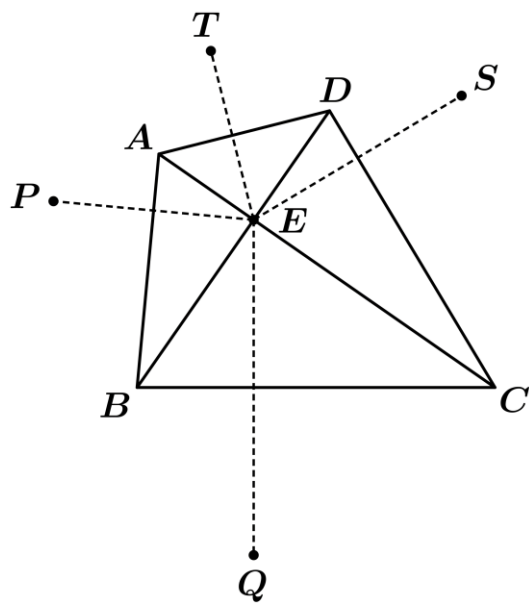
設這些子集合內的元素乘積分別為 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{127}$ ，求

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{127} = \text{_____}。$$

參考答案： $\frac{171}{85}$

二、計算證明題（每題 10 分，共 20 分）

1. 如圖所示， $ABCD$ 是一個凸四邊形，若兩對角線 \overline{AC} 與 \overline{BD} 彼此垂直且交於 E 點，設 P, Q, S, T 分別為點 E 對於 $ABCD$ 四個邊的對稱點。證明： P, Q, S, T 四點共圓。（10 分）



2. x, y 為實數，且 $x^2 + xy + y^2 = 6$ ，試求 $x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x + y$ 的最大值及最小值分別為多少？（10 分）

參考答案：最大值：3、最小值： $-8-6\sqrt{2}$

三、申論題（共 24 分）

1. 在第四冊數 A 的教學中有一道問題：

空間中有二直線 $L_1: \frac{x+5}{3} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-2}{-1}$ 、 $L_2: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-2}{2}$ ，試
 求出 L_1 與 L_2 的距離為何？

(1) 請以講述這道問題前的知識概念教學脈絡、教學流程，以及學生可能會犯錯的迷思概念等，設計一份教案。(8 分)

(2) 試用 3 種以上不同的方法求出 L_1 與 L_2 的距離。(每種方法 2 分，上限為 6 分)

2. 目前高一數列級數課程中，經常會介紹到三個常用級數和公式：

$$\text{若 } n \text{ 為正整數，} \begin{cases} 1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1) \\ 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1) \right]^2 \end{cases}。$$

大部分參考書皆是直接提出結論，可能將這些級數和公式作為數學歸納法證明的練習，但未告知其由來。因此若教完這個單元後，學生過來詢問級數 $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4$ 的公式為何時，你會如何跟學生介紹呢？(10 分)