國立嘉義高級中學 114 學年度第一學期第 1 次教師甄選-數學科試題

一、 填充題：(每題 6 分，共 90 分)

1. 在極坐標上三點 $A[4,117°]$、$B[3,57°]$與$C[5,\theta]$，當$\overline{AC}$長度有最大值時，ΔABC的外接圓半徑為________。

2. 設甲、乙、丙三位射手之命中率依次為p、q、r，其中$p \geq q \geq r$，今三人同打一靶且互不影響，各發一彈時，此靶不中彈之機率為$\frac{1}{4}$，恰中一彈之機率為$\frac{11}{24}$，恰中二彈之機率為$\frac{1}{4}$，則序組$(p,q,r)=$________。

3. $2^{n-1} \leq x \leq 2^n$，$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$（其中$2^0=1$），為數線上 14 個閉區間。則以上 14 個閉區間中有______個包含某個正奇數平方。

4. $f(x)$為實函數且$f(x)>0$，$\forall x \in R$，已知$f(2)=1$、$2f(\alpha+\beta)=f(\alpha)\cdot f(\beta)$，其中$\alpha,\beta \in R$，則$f(\frac{2}{3})=$______。

5. 試求$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)=$______。

6. 若$x>0$、$y>-1$，且$x+2y=3$，則$x\cdot\sqrt{1+y}$的最大值為______。

7. 若α為$2x+2^x=5$之解，β為$2x+2\log_2(x-1)=5$之解，則$\alpha+\beta=$______。

8. ΔABC為直角三角形且$\angle C=90°$，D為斜邊$\overline{AB}$上一點，$\overline{AC}=9$、$\overline{BC}=8$、$\overline{CD}=6$。已知ΔACD之內切圓與ΔBCD之內切圓有相同的半徑，則ΔACD面積是ΔBCD面積的______倍。

9. 若 A 為 $y=|x|$ 上一點，B 為 $x=y^2+4$ 上一點，則$\overline{AB}$長的最小值為______。

10. 已知$f_n(x)=\cos x\cos 2x\cos 3x\cdots\cos nx$，若$|f_n''(0)|\geq 2025$，則 n 之最小值為______。

11. 已知圓 O 的圓心為 O、半徑為 3，直線 PA 與圓 O 相切於 A，直線 PB 與圓 O 交於 B、C 兩點，D 為 $\overline{BC}$ 的中點，若 $\overline{PO}=5$，則 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$ 的最大值為______。

12. 某校物研社想辦春遊，其中檜意森活村、嘉大昆蟲館、文化路觀光夜市等三個旅遊景點由 7 個幹部投票，不過每個人可以不選或選 1 個、2 個或 3 個景點，投票結果發現，只選 1 個及 2 個景點的各有 3 人，有 1 人不選任何景點。已知沒有任何兩人選的景點完全相同，則任取 3 人，此 3 人選出的景點剛好包含三個景點的機率為______。

13. 若集合 A,B,C 滿足以下條件：

(1) $A,B,C\subseteq\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

(2) $|A\cap B|=|B\cap C|=|C\cap A|=2$

(3) $|A|=|B|=|C|=4$

求集合序對 (A,B,C) 的可能情形數為______。

14. 已知隨機變數 $X\sim B(101,\frac{1}{6})$，當 $k=$______時，機率 $P(X=k)$ 有最大值。

15. 若 m,n 為正整數，方程式 $x^4+5x^3+mx^2+nx+4=0$ 的四根中，有兩相異實根和為 -5，則此方程式的最小可能實根為______。

二、 計算證明題： (共 10 分) 需有計算過程。

坐標平面上有一 ΔOAB，其中 O 為原點，A、B 在第一象限，$\overline{OA}=\overline{OB}=40$，$\overline{AB}=20$，若 A、B 經矩陣

$$\begin{bmatrix}\frac{9}{10}\cos\theta & -\frac{9}{10}\sin\theta\\ \frac{9}{10}\sin\theta & \frac{9}{10}\cos\theta\end{bmatrix}$$

依序變為 C、D。若 C 在 ΔOAB 內，D 在第二象限且 $\angle OBC+\angle OAC=90^\circ$。

(1) 證明：$\Delta OAC\cong\Delta OBD$ (5 分)

(2) 求 $\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$ 之值為__________。(5 分)