桃園市立陽明高中數學科教甄試題

一、　填充題，每題 5 分，共 60 分。

1. 設實係數多項式 $f\left(x\right)=2x^3+x^2+2x+3-\int_1^x f\left(t\right)dt$ ，則 $f\left(x\right)=$____________。

2. 有 6 個紅球，3 個藍球，3 個黃球，將這些球放置於一條線上，假設同色球沒有區別，試問同色球不相鄰的放法有____________種。

3. 在 ΔABC 中，$\overline{AB}=2\overline{AC}$ ，$\overline{AD}$ 為 $\angle A$ 的角平分線且 $\overline{AD}=k\overline{AC}$ ，若已知 ΔABC 的面積為 1，試求 $\overline{BC}$ 的最小值為___________。

4. 在複數平面上，設複數 $z=a+bi$ ，$a,b\in R$ ，且 $a^2+b^2=1$ ，試求 $\left|z^2+z-6\right|$ 之最大值為___。

5. 方程式 $\sin^8 x+\cos^8 x=m$ 若有實數解，則 m 的範圍為____________。

6. 已知數列 $\left\{a_n\right\}$ 中，$a_1=1$，當 $n\geq 2$ 時，其前 n 項和 S_n 滿足 $S_n{}^2=a_n\left(S_n-\frac{1}{2}\right)$，求 S_n 的表達式為_______。

7. 已知橢圓 Γ 與雙曲線 $\Gamma_1:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 有相同焦點，且 Γ 上一點 P 在直線 $L:x-y+9=0$ 上，若欲使橢圓 Γ 之長軸最短，此時 Γ 之方程式為_______________。

8. 設$x, y \in \mathbb{R}$滿足$x^2+y^2-2y \le 0$，求$\dfrac{x+2y-5}{x-y-1}$之最大值＝__________。

9. 求與曲線$y=x^4-2x^3+4x$切於相異兩點的切線方程式為__________。

10. 求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(1^2+2^2+\cdots+n^2)}{(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})^2}$ 的值＝__________。(若發散填「不存在」)

11. 袋子裡有七顆球，其中 1 號球三顆、2 號球四顆。以取後放回方式，每次隨機抽取兩球(每球被取到機率均等)，並記錄此兩球號碼，若兩球號碼相同，則可重複再隨機抽取兩球，直至兩球號碼不同則停止抽取，完成一輪操作。令隨機變數 X 表示每輪取出球號碼總和，求 X 的期望值＝_____。

(Ex1：某輪先取出兩球 1 號，再取出兩球 2 號，再取出一球 1 號一球 2 號，則 X=2+4+3=9；

Ex2：某輪先取出兩球 2 號，再取出兩球 2 號，再取出一球 1 號一球 2 號，則 X=4+4+3=11。)

12. 甲乙兩人進行每局 8 分的桌球比賽，兩人實力相當(每一分甲乙獲勝機率各$\frac{1}{2}$，先得 8 分者獲勝)，已知這局比賽結果甲$8:6$獲勝，則這局比賽過程中，兩人分差保持最多相差兩分的機率＝______。

(分差保持最多相差兩分意思是：這局比賽過程中，$|\text{甲分數}-\text{乙分數}| \le 2$。) (以指數型式作答即可)

二、 作圖、計算證明題，每題 10 分，詳細配分如各題標示，共 40 分。

1. 設 x、y、z 為正實數，且滿足 $x+y+z=1$，試證：$\dfrac{x-yz}{x+yz}+\dfrac{y-zx}{y+zx}+\dfrac{z-xy}{z+xy}\le\dfrac{3}{2}$

2. 設 $P=\left(\log_2 x-1\right)\cdot\left(\log_3 y\right)^2-2\cdot\left(3\log_2 x+a\right)\cdot\left(\log_3 y\right)+\log_2 x+1$，試問：

   (1) 當 $a=0$，$1\le x\le 2$，且 P 恆為正值時，此時 y 的範圍為何？(3 分)

   (2) 若對 $x\ne 2$ 的一切正實數 x，均有 y 使得 $P=0$，試問實數 a 的範圍？(7 分)

3. 重複操作一個成功機率為 p ($0<p<1$)的伯努力試驗(每次試驗結果皆獨立)。設隨機變數 X 表示第一次成功發生所需的試驗次數，已知 X 的期望值 $E(X)=\frac{1}{p}$。

   (1) 請用 p 表示 X 的變異數 $Var(X)$ =______。(此小題不需計算過程。) (3 分)

   (2) 利用 $Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$ 及上述已知條件，證明第(1)小題答案。(7 分)

   (亦可利用 $Var(X)=E[X(X-1)]+E(X)-[E(X)]^2$ 證明)

4. (1) 在 xy 平面上畫出 polar equation $r=4\sin\theta$ (3 分)

   (2) 在 xy 平面上畫出 $f(x)=e^{\frac{-x^2}{2}}$ (需標出反曲點坐標) (5 分)

   (3) 求 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx$ 的值=______。(此小題不須計算過程) (2 分)