

臺北市立大直高級中學 114 學年度第 1 次專任教師甄選 高中數學科 筆試試題
(共兩頁)

請將答案按題號順序寫在答案卷上。計算與證明題須詳附推論過程，否則不予計分。

範圍：高中數學及教學專業知能

一、填充題 (共 9 題，每題 6 分)

1. 給定一數列：1, 9, 9, 6。進行如下操作：對每兩個相鄰的數做一次減法，由右邊的數減去左邊的數，並把差寫在這兩個項的中間，此時完成第一輪操作，且產生 7 個數構成的數列：1, 8, 9, 0, 9, -3, 6。接著對此新的數列再做一次如同上述規定的操作，此為第二輪操作，且得到 13 個數的數列：1, 7, 8, 1, 9, -9, 0, 9, 9, -12, -3, 9, 6。同樣的操作共進行 200 次，到第 200 輪為止。試問，若到第 200 輪時，此數列各項的總和為 a ，且此數列共有 b 項，則數對 $(a, b) =$ _____。
2. 已知正整數 a, b, c 成等差，且 $\tan^{-1}\frac{1}{a} + \tan^{-1}\frac{1}{b} + \tan^{-1}\frac{1}{c} = \frac{\pi}{4}$ ，則數對 $(a, b, c) =$ _____。
3. 袋中有 25 張大小相同的卡片，分別記上 $\log 1, \log 2, \log 3, \dots, \log 25$ ，從袋中任意取一張卡片。假設每張卡片被取到的機會都相同，取出的卡片為 $\log k$ ，其中 k 為正整數 1 到 25 中任意一數。若此試驗重複做 100 次，且每次取完後卡片放回袋中，則這 100 次所取出的 $\log k$ 中，可表示成 $a \log 6 + b \log 15 + c$ (a, b, c 為有理數) 的次數期望值為_____。(舉例：如 $\log 24 = 2 \log 6 - \log 15 + 1$ ，但 $\log 14 = \log(2 \times 7)$ 則不能表示為 $a \log 6 + b \log 15 + c$)
4. 設 \vec{a}, \vec{b} 為平面上兩個非零向量，且 \vec{a}, \vec{b} 的夾角為 60° ，令 $r = \frac{|\vec{a} + 2\vec{b}|}{|2\vec{a} + \vec{b}|}$ ，則 r 的範圍為_____。
5. 若一袋中有 2 個白球、3 個紅球、4 個黑球，每一球被取中的機會均等，則一次取出四球，恰為二色的機率為_____。
6. 設 a, b, c 為多項式 $x^3 - 8x^2 + 8x - 1 = 0$ 的三個根，對於每一個非負整數 n ， $S_n = a^n + b^n + c^n$ ，則 S_{2025} 的個位數為_____。
7. 以 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的焦點為焦點，且過直線 $L: x - y + 9 = 0$ 的一點 M 作一橢圓。欲使橢圓的長軸最短，則橢圓的方程式為_____。
8. 若 $x, y \in \mathbb{R}$ ，則 $\sqrt{y^2 - 8y + 20} + \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 - 12x + 40}$ 之最小值為_____。
9. 若拋物線 $y = x^2$ 與直線 $y = mx$ ($0 < m < 2$) 在 $x \in [0, 2]$ 所圍成的區域面積為 R ，則 R 的最小值 = _____。

請接下一頁繼續作答

二、計算與證明題 (第 1 題到第 3 題每題 10 分，第 4 題 16 分，共計 46 分)

1. 設 a 、 b 、 c 為相異的正整數， $a < b < c$ ，且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{5}{7}$ ，試求數對 (a, b, c) 。
2. 空間坐標系中三點 $A(a, a^2, a^3)$ 、 $B(b, b^2, b^3)$ 、 $C(c, c^2, c^3)$ ，其中 $a > b > c > 0$ 。若有一平面 E 過 A 、 B 、 C 三點，試證：原點到 E 的距離為 $\frac{abc}{\sqrt{(ab+bc+ca+1)^2 + a^2 + b^2 + c^2}}$ 。
3. 在坐標平面上，設 O 為原點，已知拋物線 $\Gamma: y = x^2 + 2x + 1$ ，直線 L_n 的方程式為 $y = 2^{n-2} \cdot x + 5$ ，其中 n 為正整數。設拋物線 Γ 與直線 L_n 交於 A_n 、 B_n 兩點，則 $\triangle OA_n B_n$ 面積的最小值為何？此時 n 的值為何？

4. 小明有一天在一本書上看到一道有趣的問題，問題描述如下：

「有從一年級到六年級的兒童各一人，排成一列領取物品，如果一個高年級的兒童站在低年級的兒童前面，那麼高年級兒童後面所有比他年級低的兒童都會各有一次“怨言”。在一種排列順序裏，我們把“所有年級的怨言總數”叫『怨言數』（註：一個人可以有兩次以上的“怨言”）。例如：若兒童的年級排列為 1、4、3、6、2、5，並記為 $(1, 4, 3, 6, 2, 5)$ ，則 1 年級有 0 次怨言、4 年級有 0 次怨言、3 年級有 1 次怨言、6 年級有 0 次怨言、2 年級有 3 次怨言、5 年級有 1 次怨言，則此種排列的怨言數為 $0 + 0 + 1 + 0 + 3 + 1 = 5$ 次，亦即 $(1, 4, 3, 6, 2, 5)$ 為怨言數 = 5 的一種排列方法。」

小明決定開始研究這道問題，他從簡化這個問題開始，設兒童總數為 n ，若 $n = 2$ （即只有 1、2 年級各 1 位學生），怨言數為 0 的排列方法數有 1 種，即 $(1, 2)$ （年級排列方式為 1、2）；怨言數為 1 的排列方法數也有 1 種，即 $(2, 1)$ （年級排列方式為 2、1），所以

- (a) 當 $n = 3$ 時，試列出怨言數分別為 0、1、2、3 的排列方法。
- (b) 當 $n = 4$ 時，試列出怨言數為 2 的排列方法。
- (c) 若你欲指導小明以此題進行研究，試以專題寫作的體例，擬出研究主題、研究問題，以及研究步驟及方法。

試題結束

解答

一、填充題 (共 9 題，每題 6 分)

1 $(1025, 3 \times 2^{200} + 1)$

2 $(2, 5, 8)$ 或 $(8, 5, 2)$

3 64(次)

4 $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2} \leq r \leq \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2} \quad \left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{21}}{2}} \leq r \leq \sqrt{\frac{5+\sqrt{21}}{2}} \right)$

5 $\frac{53}{126}$

6 3

7 $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{36} = 1$

8 10

9 $\frac{8-4\sqrt{2}}{3}$

二、計算與證明題 (第 1 題到第 3 題每題 10 分，第 4 題 16 分，共計 46 分)

1 $(2, 5, 70)$; $(2, 6, 21)$; $(2, 7, 14)$

2 略

3 10 ; $n = 3$

4 (a) 略 ; (b) 略 ; (c) 略