

# 教育部受託辦理114學年度 公立高級中等學校教師甄選

## 數學科試題

### 作答注意事項

1. 本試題共兩部分：選擇題 17 題，及綜合題 2 大題，共計100分；
2. 選擇題請用2B軟心鉛筆在答案卡劃記，綜合題限用藍色、黑色原子筆或鋼筆在答案本上作答，但繪圖時得使用黑色鉛筆。
3. 本科不可以使用電子計算器。

## 第一部分：選擇題 (共40分)

### 一、單選題 (每題2分，共22分)

- (A) 1. 設  $\langle a_n \rangle$  為一等比數列。已知前十項的和為  $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = 60$ ，前五個偶數項的和為  $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 40$ ，試選出首項  $a_1$  的正確範圍。

(A)  $0.05 \leq a_1 < 0.06$  (B)  $0.06 \leq a_1 < 0.07$  (C)  $0.07 \leq a_1 < 0.08$  (D)  $0.08 \leq a_1 < 0.09$

- (C) 2. 同時擲四顆相同的公正骰子，已知每次擲骰子所出現點數的情況皆獨立，直到四顆骰子的點數乘積為完全立方數時才停止擲骰子，則投擲次數的期望值最接近下列哪一個正整數？(A) 19 (B) 20 (C) 21 (D) 22

- (B) 3. 設  $f(x) = \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x$ ，且  $g(x) = f\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) - |x|$ ，試問  $y = g(x)$  的圖形與  $x$  軸的交點個數。(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

- (B) 4. 一副撲克牌原有52張牌，不小心遺失了1張(假設每種花色遺失的機率都是  $\frac{1}{4}$ )，由剩下的51張任取2張。求所取2張都是紅心的條件下，遺失的那一張也是紅心的條件機率為下列何者？(A)  $\frac{11}{24}$  (B)  $\frac{11}{50}$  (C)  $\frac{11}{250}$  (D)  $\frac{11}{425}$

- (B) 5. 令  $f(x) = x(x^2 + 1)(x^3 + x + 2)$ ，試問有多少個實數  $a$  滿足  $\int_0^a f'(x) dx = 0$ ？  
(A) 1個 (B) 2個 (C) 3個 (D) 4個

- (D) 6. 已知  $(x + \frac{1}{\sqrt{x}})^n$  的展開式中，各項係數和為4096，將展開式中  $(n+1)$  項重新排列，試問整數次方項不相鄰的機率為何？(A)  $\frac{1}{22}$  (B)  $\frac{7}{22}$  (C)  $\frac{7}{26}$  (D)  $\frac{15}{26}$

- (C) 7.  $x, y \in \mathbb{Z}$ ，試問  $\left| \frac{x}{3} + \frac{y}{4} - \frac{114}{5} \right|$  之最小值為何？(A)  $\frac{1}{15}$  (B)  $\frac{1}{20}$  (C)  $\frac{1}{30}$  (D)  $\frac{1}{60}$

- (B) 8. 若線性方程組的增廣矩陣為  $\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & 3 & 1 & 11 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{array} \right]$ ，經過矩陣列運算後化成  $\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & \beta \\ 1 & 0 & 1 & \gamma \end{array} \right]$ ，

試選出正確的選項。

(A)  $\alpha = 2$  (B)  $\beta = 5$  (C)  $\gamma = 3$  (D) 此線性方程組無解

( C ) 9. 試計算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^3+1}{2^3-1} \times \frac{3^3+1}{3^3-1} \times \frac{4^3+1}{4^3-1} \times \dots \times \frac{n^3+1}{n^3-1} \right) = ?$

- (A)0 (B)1 (C) $\frac{3}{2}$  (D) $\frac{9}{4}$

( B ) 10. 給定數列  $\langle a_n \rangle = \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_n = 3a_{n-1} - 2(-1)^{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$ ，試問  $a_{114}$  是幾位數？

- (A)54 (B)55 (C)56 (D)57

( A ) 11. 若  $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ ，且滿足  $f(x+2) = f(x)$ ，則  $y = f(x)$  圖形與  $y = \frac{1}{8}x$  圖形的交

- 點有幾個？(A)8 (B)10 (C)12 (D)14

## 二、複選題 ( 每題3分，共18分，全對才給分 )

( AB ) 12. 下列有關  $\triangle ABC$  的敘述，試選出正確的選項。

- C (A)若  $0 < \tan A \tan B < 1$ ，則  $\triangle ABC$  為鈍角三角形  
(B)若  $\sin A + \cos A = \frac{1}{4}$ ，則  $\triangle ABC$  為鈍角三角形  
(C)若  $\sin A = \frac{1}{3}$  且  $\cos B = \frac{1}{4}$ ，則  $\triangle ABC$  為銳角三角形  
(D)若  $\sin A = \frac{5}{6}$  且  $\sin B = \frac{4}{5}$ ，則  $\triangle ABC$  為銳角三角形

( AC ) 13. 下列有關函數極限的敘述，試選出正確的選項。

- (A)設非零函數  $f(x)$  滿足極限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( f(x) + \frac{[x]}{x} \right)$  存在，則極限  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  必定不存在  
(B)設非零函數  $f(x)$  滿足極限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( f(x) \cdot \frac{[x]}{x} \right)$  存在，則極限  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  必定不存在  
(C)設非零函數  $f(x)$  滿足極限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( f(x) \cdot \frac{[x]}{x} \right)$  存在，則極限  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^2$  必定存在  
(D)設  $[x]$  為不大於實數  $x$  的最大整數，且非零函數  $f(x)$  滿足極限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( f(x) \cdot \frac{[x]}{x} \right)$  存在，則極限  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  必定存在

( BD ) 14. 將  $\underbrace{333\cdots 3}_{99\text{個}3} \times \underbrace{666\cdots 6}_{99\text{個}6}$  乘開，得一  $n$  位數，請問下列哪些選項是正確的？

(A)  $n=199$  (B) 個位數字為 8 (C) 最高位數字為 1 (D) 由左向右數來第 100 位數為 7

( AB ) 15. 三次曲線  $y = x^3 + ax^2 + 1$ ，若由原點可作三條相異切線，試問實數  $a$  的值可以是下

D 列何者？ (A)  $\pi$  (B)  $\sqrt{2025}$  (C)  $\log 114$  (D)  $\frac{2025}{114}$

( AD ) 16. 已知兩等比數列  $\langle a_n \rangle = \langle 2, 4, 8, \dots \rangle$ ， $\langle b_n \rangle = \langle 5, 25, 125, \dots \rangle$ ，若將兩數列之所有數字混合

後並由小至大重新排列後得到一個新的數列  $\langle c_n \rangle = \langle 2, 4, 5, 8, 16, 25, \dots \rangle$ ，請選出正確的選項。

(A) 數列  $\langle c_n \rangle$  中的各項均相異

(B)  $a_{30} = c_{45}$

(C)  $b_{10} = c_{30}$

(D) 若  $a_{20} = c_k$ ， $a_{30} = c_{k+h}$ ，則  $h=14$

( AD ) 17. 坐標平面上，圓  $C$  為三角形  $ABC$  的內切圓，若圓心為  $O$  且已知  $A(2, -4)$ ，

$\overline{OB}: x + y - 2 = 0$ ， $\overline{OC}: x - 3y - 6 = 0$ ，則下列敘述何者正確？

(A)  $A$  點對  $\overline{OB}$  的對稱點  $A'$  必定在  $\overline{BC}$  上

(B)  $A$  點對  $\overline{OB}$  的對稱點  $A'$  為  $A'(8, -2)$

(C)  $\overline{BC}: 2x + 7y = 2$

(D) 圓  $C$  的方程式為  $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 8 = 0$

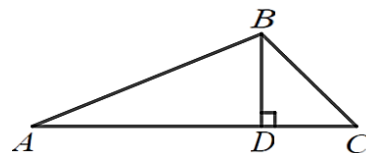
## 第二部分：綜合題 (共 60 分)

### 一、填充題 (每題 4 分，共 36 分)

1. 已知空間向量  $\vec{a} = (4, 1, 3)$ ， $\vec{b} = (2, 3, 1)$ ， $\vec{c} = (3, 7, -1)$ 。若  $\vec{a}$  在  $\vec{b}$  與  $\vec{c}$  所張成平面  $E$  上的正射影為  $x\vec{b} + y\vec{c}$ ，試求數對  $(x, y) = \left(\frac{41}{15}, -\frac{14}{15}\right)$ 。

2. 如右圖（此為示意圖）， $\triangle ABC$  中， $\angle A$  與  $\angle C$  皆為銳角， $\overline{BD}$  為

底邊  $\overline{AC}$  的高，已知  $\frac{\triangle ABC \text{ 面積}}{\triangle BCD \text{ 面積}} = 3$ ，試求  $\frac{2}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} + \frac{3}{\tan C}$  的最小值  
 $= \frac{\sqrt{33}}{2}$ 。



3. 設  $[x]$  為不大於實數  $x$  的最大整數，試求出  $\sum_{k=1}^{114} \left[ \cos \frac{k\pi}{11} \right]$  的值  $= -50$ 。

4. 數列  $\langle a_n \rangle$  滿足  $\log_{n+1} a_n = 1 + \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}$ ，若  $\frac{a_n}{n+1} < 1.2$ ，問  $n$  的最小值  $= 12$ 。

5. 將區間  $[0, 2\pi]$  平分成 12 等分，則函數  $y = |\cos x|$  在此區間內與  $x$  軸所圍成的區域面積之上和  
 $= \frac{3+\sqrt{3}}{3}\pi$ 。

6. 空間向量  $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OD}$  滿足  $\vec{OA} \times \vec{OB} = \vec{OC}$ 、 $\vec{OA} \times \vec{OC} = \vec{OD}$ ，且  $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}| = k \neq 0$ 。

求  $|\vec{BD}| = k\sqrt{k^2 + 3}$  (以  $k$  表示)。

7. 試計算  $(\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7})(\sqrt{6} + \sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{5} + \sqrt{7} - \sqrt{6})(\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{7}) = 104$ 。

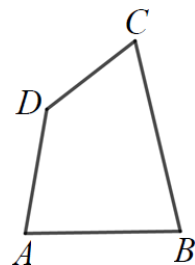
8. 將 10 張椅子排成一列，甲，乙，丙，丁，戊 5 人分成三組入座，三組人數分別為 1 人，2 人，2 人，若規定「同組的人相鄰，不同組的人不相鄰」(即各組間有空位)之坐法有 7200 種。

9. 試計算  $1! \times 1 + 2! \times 2 + \dots + 114! \times 114$  除以 2025 的餘數  $= 2024$ 。

## 二、計算題 (每題8分，共24分)

1. 如右圖(此為示意圖)，四邊形  $ABCD$  中，已知  $\vec{AB} = (5, 2\sqrt{3})$ ， $\vec{CD} = \left(-7, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ，

且  $\frac{|\vec{AB}|}{|\vec{AB}|} + \frac{|\vec{AD}|}{|\vec{AD}|} = \frac{\sqrt{3}|\vec{AC}|}{|\vec{AC}|}$ ，試求出四邊形  $ABCD$  的面積。



2. 計算  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left( \frac{1-x^{100}}{1-x} - 100 \right)$ 。

3. 試求  $y = \frac{\cos x + 2 \sin x}{2 + \cos x}$  的最大值與最小值。