臺北市立成淵高級中學 114 學年度正式教師甄選
—高中數學科筆試

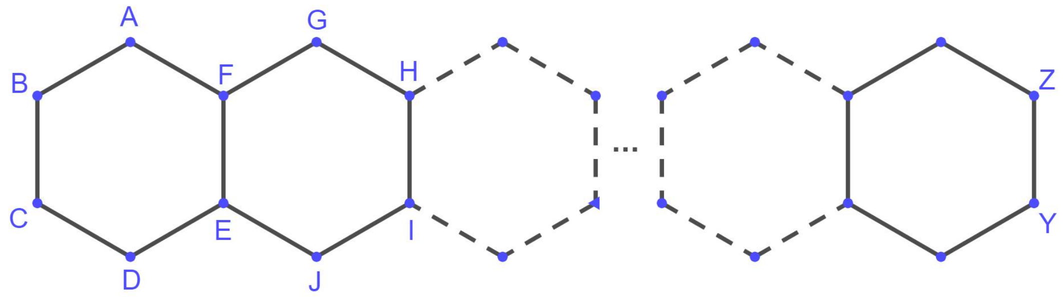
第壹部分：填充題（每題 6 分，共 72 分）

※每格$\boxed{\text{完全答對才給分}}$；答案若用分數呈現，請以最簡分數表示。

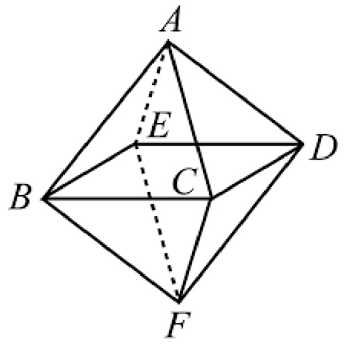
1. 設$\langle a_n\rangle$為一個實數數列，考慮數列$\langle a_n\rangle$的前n項之總和S_n，即$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，其中$n\in N$。若$S_n=n^2+4n-2$，則${a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_{10}}^2$的值為__2274__。

2. 設$f(x)=(6\sin x-8\cos x)\times(12\sin x+5\cos x)$，其中$0\le x<2\pi$，若$f(x)$的最大值為$M$，最小值為$m$，則數對$(M,m)$為__$(81,-49)$__。

3. 如下圖，平面上有26個正六邊形緊密連接，若$\overrightarrow{CZ}=\alpha\,\overrightarrow{AB}+\beta\,\overrightarrow{AC}$，其中$\alpha,\beta\in R$，則數對$(\alpha,\beta)$為__$(-77,25)$__。



4. 如下圖，空間中有一個正八面體，若$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{CE}=(1,2\sqrt{5},2\sqrt{7})$，則$\overrightarrow{AF}$為__$(-\frac{\sqrt{7}}{7},-\frac{2\sqrt{35}}{7},-2)$__。



5. 已知$x>0,\ x\ne1$，且$y=(3-\log_{\sqrt[3]{2}}x)^2+(3-\log_x 2)^2$，則$y$的最小值為__$24-12\sqrt{3}$__。

6. 設複數$z=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$，其中$i=\sqrt{-1}$，若$z^{70}+2\times z^{69}+3\times z^{68}+\cdots\cdots+70\times z+71=a+bi$，其中$a,b\in R$，$i=\sqrt{-1}$，則數對$(a,b)$為__$(36,72+36\sqrt{3})$__。

7. $y=\sin x+1$的圖形與$y=\log_{10}x$的圖形共有__31__個交點。

8. 若Γ：$\begin{cases}x^2+y^2\le6\\x\le0,\ y\ge0\end{cases}$為$xy$平面上的區域，將$\Gamma$繞直線$y=x$旋轉一圈所得的旋轉體體積為__$8\sqrt{3}\pi$__。

9. 有三個大小相同的袋子 A、B、C，每個袋子都恰有四顆球，袋子 A 中四顆球的編號分別為$1,2,3,4$，袋子 B 中四顆球的編號分別為$1,3,5,7$，袋子 C 中四顆球的編號分別為$2,4,6,8$。甲同學先任選一個袋子，然後從該袋中取出一顆球，觀察此球的編號後，將此球放回袋中；接下來換乙同學任選一個袋子，然後從袋中取出一球，觀察此球的編號後，將此球放回袋中。已知每個袋子被選取到的機會均相等，而同一袋子中每顆球被選取到的機會也均相等。若甲同學取到球的編號為a，乙同學取到球的編號為b，則「在$a>b$的條件下，$b=5$」的機率為 $\underline{\dfrac{3}{62}}$ 。

10. 有種$\boxed{\text{神奇粒子}}$，每個粒子每經過 1 小時，都會出現下列三種情況之一：
有$\dfrac{1}{3}$的機率，這個粒子會變成 2 個；有$\dfrac{1}{2}$的機率，這個粒子會維持 1 個；有$\dfrac{1}{6}$的機率，這個粒子會消失；且每個粒子每小時發生的情況均獨立。
現在有 1 個這樣的$\boxed{\text{神奇粒子}}$，則「經過 3 小時後，$\boxed{\text{神奇粒子}}$的數量恰為 5 個」的機率為 $\underline{\dfrac{7}{243}}$

11. 有隻螞蟻在正立方體$ABCD-EFGH$上移動，「每一步」的移動規則是從一個頂點走稜邊至另一個頂點，且走到相鄰三頂點的機率均等。現在螞蟻從A點出發，走到最遠的G點即停止，則移動步數的期望值為 $\underline{10}$ 。

12. 在坐標平面上，有一個$\triangle ABC$，其周長為$16\sqrt{2}$，面積為16，已知A,B兩點的坐標為$A(0,0),B(4,4)$，若C點在第二象限，則C點的坐標為 $\underline{(-3\sqrt{2}-3,\ -3\sqrt{2}+6)}$ 。

第貳部分：計算證明題（共 28 分）

※請將解題過程書寫於答案卷方框內。若只有答案，**沒有詳述原因或推導過程會斟酌扣分**。

1. 已知矩陣$X=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 5\end{bmatrix}$，設$X^n=\begin{bmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{bmatrix}$，其中$n$為正整數，請回答下列各小題。

(1) 試求b_4之值。（2 分）　(2) 以n表示b_n。（7 分）

【簡答】：(1) $b_4=203$　(2) $b_n=\dfrac{1}{3}(5^n-2^n)$

2. 已知$f(x)$是定義域和對應域皆為實數的連續函數，且對於任意實數a,b皆滿足$f(a+b)=\dfrac{1}{3}f(a)f(b)$，
若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(f(x))^2-9}{x}=2025$，請回答下列各小題。
(1) 試求$f'(0)$之值。（4 分）　(2) 試證明$f(x)$在任意實數c上皆可微分。（5 分）

【簡答】：(1) $f'(0)=\dfrac{675}{2}$　(2) 略

3. 設b,c,d皆為實數且$d>0$，已知三次方程式$x^3+bx^2+cx+d=0$的三根為β、$2\beta^2$、$3\beta^3$，其中β為複數，試求實數b之值。（10 分）

【簡答】：$b=\dfrac{2}{3}$