

桃園市 114 年國民中學新進教師甄選【專業科目：數學科】試題卷

- ※注意事項：1、答案請畫在答案卡上，如寫在試題卷上一律不計分。
2、提早繳卷者，請將答案卡與試題卷一併交回。
3、本試題卷共 4 頁。

專業科目：請依照題意，從四個選項中選出一個正確或最佳答案 (共 50 題，每題 2 分，合計 100 分)

51. 設 a, b, c 為實數且 $abc \neq 0$, $A = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{|abc|}{abc}$, 求 A 所有可能值的和為多少?
 (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1
52. 設隨機變數 X 與 Y 的相關係數為 -0.4 , 則 $X - 2$ 與 $2Y$ 的相關係數為何?
 (A) -0.2 (B) -0.4 (C) -0.6 (D) -0.8
53. 設 a 為正整數, 求 $2^{a+94} + 2^a$ 的末位數字為多少?
 (A) 0 (B) 2 (C) 5 (D) 6
54. 已知 $t(x) = 3x - 1, u(x) = 5x + 4$, 若 $v(t(x)) = u(x)$, $v(x) = \frac{b}{a}x + \frac{d}{c}$ (c, d 為互質的正整數), 求 $c + d =$?
 (A) 8 (B) 15 (C) 18 (D) 20
55. 設 a 為正整數, 已知 $2a + 1$ 為 $3a - 4$ 的因數, 求 a 的所有可能值之和為多少?
 (A) 4 (B) 5 (C) 10 (D) 11
56. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ, \angle ABC = 15^\circ, \overline{BC} = 1$, 求 $\overline{AC} =$?
 (A) $2 + \sqrt{3}$ (B) $2 - \sqrt{3}$ (C) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ (D) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$
57. a, b, c, d 為自然數, $0 < a < b < c < d < 10$, 下列哪個數值最大?
 (A) $(10a + b)(10c + d)$ (B) $(10b + d)(10a + c)$
 (C) $(10c + a)(10d + b)$ (D) $(10d + a)(10c + b)$
58. 某甲的零錢包中有 50 元和 10 元硬幣, 兩種硬幣的數量相等。如果某乙拿 15 個 10 元硬幣和某甲的 50 元硬幣兌換, 則某甲的 10 元硬幣數量變成 50 元硬幣的 3 倍。某甲的零錢包內有多少錢?(元)
 (A) 650 (B) 720 (C) 760 (D) 840
59. 某甲到國外旅遊, 他在百貨公司購物支付 120 美元後到客服中心申請退稅。若該國的營業稅為 20%, 他可以拿回多少退稅金?(不考慮手續費)
 (A) $120 \cdot 0.2$ (B) $120 \cdot (1 - \frac{1}{1.2})$
 (C) $120 \cdot \frac{1}{1.2}$ (D) $120 \cdot (1 - 0.2)$
60. 齒輪箱通常設計成以小齒輪帶動大齒輪。假設小齒輪轉速為 384 rpm (revolutions per minute), 大齒輪的轉速需求為 75 rpm, 在齒數總和最小化的設計中, 大小齒輪的齒數總和為何?
 (A) 150 (B) 151 (C) 152 (D) 153
61. 複數平面上三角形, 其頂點分別是 $1 + 2i, 4 - 2i, 1 - 6i$, 問三角形面積為何?
 (A) 12 (B) 24 (C) 36 (D) 72
62. 下面何者是矩陣 $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ 的特徵值呢?
 (A) 1 (B) -4 (C) 2 (D) -2
63. 先求 $|x + 1| + |x - 1| = 3$ 的所有實數解, 問這些實數解的和是多少?
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
64. 若 $(a, b), (c, d)$ 是平面單位圓 $x^2 + y^2 = 1$ 上的點, 則 $ac + bd$ 不可能等於?
 (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

65. 瑕積分 $\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = ?$

- (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{8}$

66. 若 $\log_4 12 = a$ ，則 $\log_{\sqrt{3}} 12 = ?$

- (A) $2a$ (B) $\frac{1}{a-1}$ (C) $\frac{a}{a-1}$ (D) $\frac{2a}{a-1}$

67. 函數 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 有幾個實根呢？

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

68. 求 $x^2 - |x + 2| < 0$ 實數解集合？

- (A) $-1 < x < 2$ (B) $-2 < x < 1$
 (C) $-1 < x < 1$ (D) $1 < x < 2$

69. 平面上橢圓 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 到直線 $x + y = 7$ 最短距離是？

- (A) 2 (B) 3 (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{3}$

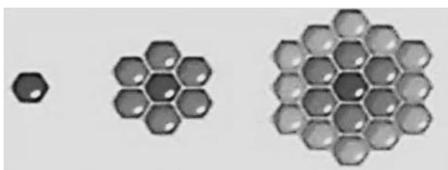
70. 若 $f(x)$ 是三次多項式， $f(-2) = -5$ ，
 $f(-1) = f(0) = f(1) = 1$ ，則 $f(2) = ?$

- (A) 0 (B) 7 (C) 14 (D) 21

71. 6 個相同的球，完全放入 4 個不同的盒子，每個盒子至少有 1 個，問有幾種放法？

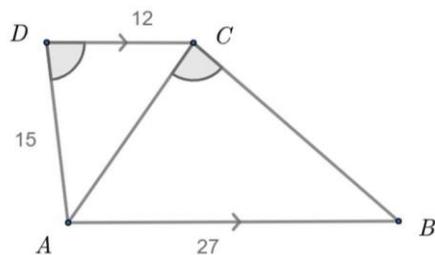
- (A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12

72. 下圖為蜂窩序列的前 3 項， $n = 1, 2, 3$ ，試問：當 $n = 7$ 時有多少間蜂房？



- (A) 110 (B) 119 (C) 123 (D) 127

73. 如圖， $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ， $\overline{AB} = 27$ ， $\overline{CD} = 12$ ， $\angle ACB = \angle CDA$ ， $\overline{AD} = 15$ ，求 $\overline{BC} = ?$



- (A) 21 (B) 22.5 (C) 24 (D) 25.5

74. 將有名的 Monty Hall problem 簡化如下：有 3 個箱子，其中一個有獎，另兩個為空箱。莊家請玩家從 3 個箱子中挑選一個。當玩家選好後，莊家會打開一個空箱，詢問玩家要不要改選另一個箱子。如果玩家決定採用一公平的硬幣決定要不要換，請問玩家中獎的機率為何？

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$

75. 設三個互不相等的有理數可分別表為 $1, a, a + b$ 及 $0, b, \frac{a}{b}$ 的形式，求 $a^{100} + b^{100} = ?$

- (A) -2 (B) 0 (C) 1 (D) 2

76. 設邊長為 3 的正三角形的內切圓為 O_1 ，而 O_1 之內接正三角形的內接圓為 O_2 ，依此作法將得到內切圓為 O_3, O_4, \dots ，令 a_k 為第 k 個內切圓的面積，求 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = ?$

- (A) π (B) 3π (C) 9π (D) 12π

77. 設 a_1, a_2, \dots, a_7 為正整數，且 $a_1 < a_2 < \dots < a_7$ ，已知 $\sum_{i=1}^7 a_i = 179$ ，求 $\sum_{i=1}^3 a_i$ 的最大值為何？

- (A) 67 (B) 69 (C) 73 (D) 75

78. 有一等比數列前 n 項的和 $S_n = 200$ ，前 $2n$ 項的和 $S_{2n} = 300$ ，求此數列前 $4n$ 項的和為多少？

- (A) 350 (B) 375 (C) 425 (D) 450

79. 設 a_1, a_2, \dots, a_n 中每一個數值只能取 $-2, 0, 1$ 中的一個數，已知 $\sum_{i=1}^n a_i = -18$ ， $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 42$ ，求 $\sum_{i=1}^n a_i^3 = ?$

- (A) -84 (B) -78 (C) -70 (D) -62

桃園市 114 年國民中學新進教師甄選【專業科目：數學科】試題卷

80. 設有濃度分別為 5%, 8%, 及 9% 的 A, B, 及 C 三種酒精, 它們分別有 60 克, 60 克, 及 41 克。若要配置成濃度為 7% 的酒精 100 克, 則要用到 A 酒精最少 a 克, 最多 b 克, 求 $a + b = ?$

- (A) 70 (B) 74 (C) 78 (D) 82

81. 若 $\left[a + \frac{1}{40} \right] + \left[a + \frac{2}{40} \right] + \dots + \left[a + \frac{39}{40} \right] = 28$, 已知

$0 < a < 1$, 求 $[10a] = ?$

($[x]$: 表示不超過 x 的最大整數)

- (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10

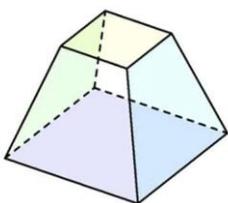
82. 紅球 14 顆白球 6 顆, 將它們排成一列, 兩個白球中間至少要排 2 個以上(包含 2 個)紅球, 求這樣的排法共有多少種?

- (A) 180 (B) 190 (C) 210 (D) 240

83. $ABCD$ 為梯形, \overline{AD} 為上底, \overline{BC} 為下底, 已知 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, 點 E 在 \overline{AB} 邊上, \overline{CE} 為 $\angle BCD$ 的角平分線, 且 $\overline{CE} \perp \overline{AB}$, $\overline{BE} = 2\overline{AE}$, 若四邊形 $AECD$ 的面積為 7, 則梯形 $ABCD$ 的面積為多少?

- (A) 9 (B) 10 (C) 12 (D) 15

84. 四角錐台 (frustum) 為大金字塔切去上方小金字塔而得, 如下圖:



某個四角錐台高為 1 單位, 四角錐台側邊(梯形)的上下底分別為 3 與 5。若將該四角錐台的表面積寫成 $a + b\sqrt{c}$, 則 $a + b + c$ 的值為何?

- (A) 52 (B) 54 (C) 57 (D) 60

85. 承上, 若該四角錐台的體積為 $\frac{d}{e}$ (最簡分數), 則

$d + e$ 的值為何?

- (A) 52 (B) 54 (C) 57 (D) 60

86. d 波利亞甕 (Polya's Urn) 是一種把樣本還原為母體 (Unsampling) 的模型: 假設某抽樣的目的是調查某社群對某項議題的支持度, 而抽樣結果為「3 人支持、2 人反對」。現在用「3 個黑球、2 個白球」表示此樣本, 放入一甕中, 並開始逐步還原為母體(反抽樣): 從中抽出 1 球, 若為黑球, 將其放回並補充 2 個黑球; 若為白球, 將其放回並補充 2 個白球, 如此稱為一回。計算在第 4 回合補充黑球的機率。

- (A) 0.3 (B) 0.5 (C) 0.6 (D) 0.8

87. 已知線性映射 $F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, 而且 F 把平面上的直線 $x - y + 1 = 0$ 映射到另一直線, 問新的直線方程式為?

- (A) $x + y + 1 = 0$ (B) $x + y - 1 = 0$
(C) $x - y + 1 = 0$ (D) $x - y - 1 = 0$

88. 三度空間上, 若向量 $(1, -2, 1)$, $(0, 1, 2)$, $(2, -3, c)$ 是線性相依, 則 $c = ?$

- (A) -4 (B) 4 (C) 2 (D) -2

89. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2} = ?$

- (A) 1 (B) 2 (C) -1 (D) -2

90. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1} + \dots + \sqrt{n}}{\frac{3}{n^2}} = ?$

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 4

91. 求 $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = ?$

- (A) 1 (B) -1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$

92. 函數 $f(x) = \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x^2 + 2}}$ 的最小值是?

- (A) 2 (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (D) $\sqrt{2}$

桃園市 114 年國民中學新進教師甄選【專業科目：數學科】試題卷

93. 若平面上的三角形的邊長分別是 $\sqrt{13}$ 、5 與 6，則此三角形的面積等於？

- Ⓐ 9 Ⓑ 18 Ⓒ 36 Ⓓ 12

94. 若 $x = \frac{4}{\sqrt{5}+1}$ ，則 $x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = ?$

- Ⓐ 1 Ⓑ -1 Ⓒ 2 Ⓓ -2

95. 某甲在一段階梯跳上跳下，每跳一次恰移動一個台階。如果他從地面開始連跳 6 次，最後回到地面，有幾種可能跳法？

- Ⓐ 5 Ⓑ 8 Ⓒ 13 Ⓓ 20

96. $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 與 x 軸交於 A, B 兩點，與 y 軸交於 C 點，若 $\triangle ABC$ 為直角三角形，則 $ac = ?$

- Ⓐ -2 Ⓑ -1 Ⓒ 1 Ⓓ 2

97. 設 $a^2 + 2a - 1 = 0$ ， $b^4 - 2b^2 - 1 = 0$ 且 $ab^2 \neq 1$ ，求

$$\left(\frac{ab^2 + b^2 + 1}{a}\right)^2 = ?$$

- Ⓐ 1 Ⓑ 4 Ⓒ 6 Ⓓ 8

98. 令 $A = \{a \mid a = 2^t + 2^u + 2^v, 0 \leq t < u < v\}$ ，設 t, u, v 為整數，集合 A 中的數由小排到大組成一個數列 $\{a_n\}$ ，舉例而言， $a_1 = 7, a_2 = 11, a_3 = 13$ ，求 $a_{38} = ?$

- Ⓐ 132 Ⓑ 134 Ⓒ 137 Ⓓ 145

99. 設直線 $3x - y = 0$ 上有一個動點 P ，已知平面上有另二固定點 $A(1, -2)$ 及 $B(0, -1)$ ，當 P 點的座標為 (c, d) 時， $\overline{PA} + \overline{PB}$ 的值最小，求 $c = ?$

- Ⓐ -2 Ⓑ -1 Ⓒ $-\frac{2}{3}$ Ⓓ $-\frac{1}{3}$

100. 若 $a_n = \sum_{k=1}^n k$ ，且 $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = ?$

- Ⓐ 1 Ⓑ 2 Ⓒ $\frac{1}{2}$ Ⓓ $\frac{1}{4}$

-----試題結束-----

敬祝金榜題名