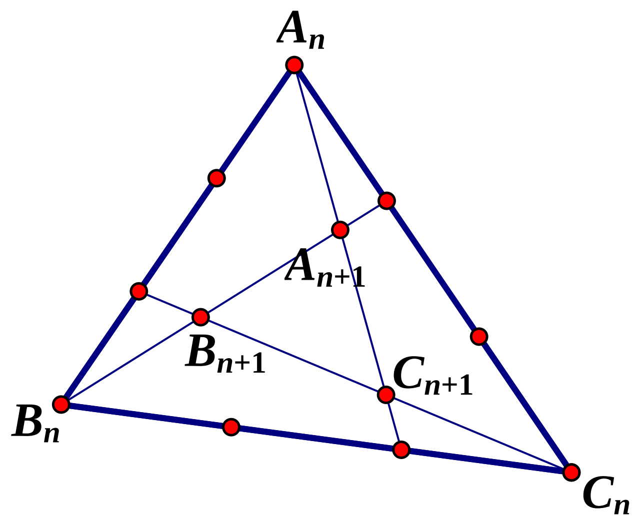
國立金門高中**114** 學年度第一次教師甄選數學科試題卷(共**4**頁)

一、 填充題(每格 5 分，共 70 分)

1、已知$10=2^3+2$可用二進位表示為$(1010)_2$，是二進位中的 4 位數；$100=2^6+2^5+2^2$可用二進位表示為$(1100100)_2$，是二進位中的 7 位數。請問10^{100}是二進位中的______________位數。($\log 2=0.3010$)

2、 有100 扇門，分別編號 1~100 號，一開始全部都是關閉，被按第一次為開，第二次為關，第三次為開… 依此類推(也就是按奇數次為開、偶數次為關)，編號 1~100 號同學(只有 6 號沒來)，每人將自己編號的倍數按一次，例如:1 號同學將全部的門都按 1 次，2 號同學會將 2、4、6、8、…、100 的門都按 1 次。請問這 100 扇門最後有_________扇門是打開的。

3、已知三角形$A_1B_1C_1$是面積為 1 的任意三角形，如圖所示，對每個自然數 n，連接三角形$A_nB_nC_n$各邊對應三等分點與頂點之連線，可圍成一個新的三角形$A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$。令a_n表示三角形$A_nB_nC_n$的面積，則$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=$________。



4、 已知 n 為正整數且$2n^2+3n-44=3P^2$ ，其中 P 為質數，則所有可能的 n 值為＿＿＿＿＿＿＿＿。

5、試求$x^{114}+2025$除以$(x-1)^2$之餘式為＿＿＿＿＿＿＿＿。

6、在空間坐標中，$A(1,-1,2)$、$B(1,1,0)$、$C(1,0,4)$ ，P為平面E：$x+y+z=0$上的動點，

則$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$之最小值為＿＿＿＿＿＿。

7、已知 $f(x)=3\sin x+4\cos x$，若α，β為銳角且 $f(\alpha)=2, f(\beta)=1$，則 $\sin(\alpha-\beta)=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

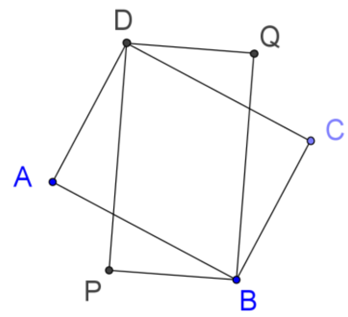
8、將4個 A、4個 B、4個 C，12 個字母排成一列，條件是前 4 個字母沒有 A，中間 4 個字母沒有 B，最後 4 個字母沒有 C，則滿足條件的排法有＿＿＿＿＿＿＿＿種。

9、已知 $a = 1! \times 2! \times 3! \times 4! \times 5! \times 6! \times 7! \times 8! \times 9! \times 10!$ ，則有________個完全平方數是 a 的因數。

10、如圖，四邊形 $ABCD$ 與 $PBQD$ 皆為矩形，$\overline{AD}=6$，$\overline{DC}=8$，$\overline{DQ}=5$，試求：

(1) ΔABQ 的面積＝__________。

(2) $\overline{AQ}^2$＝___________。



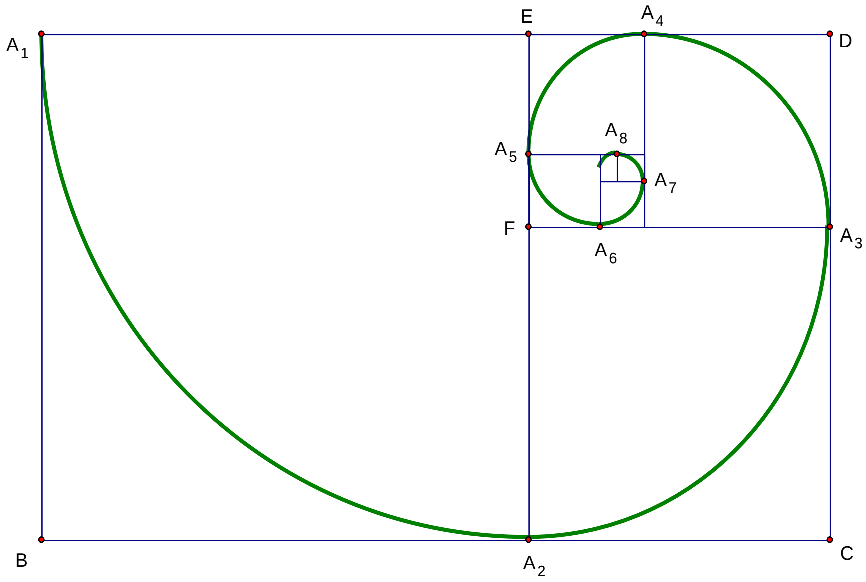
11、設 x，y 為實數，則$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{4^2+(x-6)^2}+\sqrt{5^2+(y-8)^2}$的最小值為________________。

12、設 a_n 為10^n的所有正因數總和，則$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{10^{n+1}}=$________。

13、已知 a、b、c 為正實數，且 $a+b+c=2$，則$(\frac{1}{a}-\frac{1}{2})(\frac{1}{b}-\frac{1}{2})(\frac{1}{c}-\frac{1}{2})$的最小值為__________。

二、　計算與說明題（每題 10 分，共 30 分）

1、如右圖，將黃金矩形 A_1BCD 的寬 $\overline{A_1B}$ 為邊作一正方形 A_1BA_2E，並以正方形的邊為半徑畫四分之一個圓弧；再對分割出正方形 A_1BA_2E 後所剩下的矩形 A_2CDE，重複上述畫圓弧的動作；不斷的重複這個動作，我們可得到一條通過 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$........的螺線，若已知 $\overline{A_1B}=1$，試求此螺線長度？



2、設 O 為複數平面上的原點，令點A,B分別代表複數z_1,z_2，滿足$|z_1|=2,|z_2|=3,|z_2-z_1|=\sqrt{5}$，試求

(1) $\cos\angle AOB=$　　　　　　(3 分)

(2) $|z_2+z_1|=$　　　　　　(3 分)

(3) $\frac{z_1}{z_2}=$　　　　　　(4 分)

3、在座標平面上由 $A(1,0)$作二次函數 $y=x^2+3$ 的切線，

(1)求出這兩條切線方程式。(5 分)

(2)求出這兩條切線與拋物線 $y=x^2+3$ 所圍成區域的面積。(5 分)