

臺北市立南港高工 114 學年度第 2 次教師甄選筆試命題試題紙

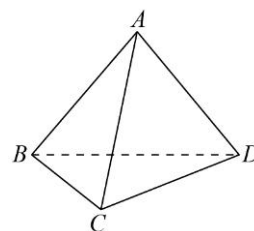
甄選科別： 一般類科科目： 數學科

作答說明

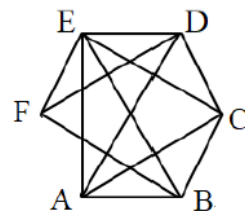
1. 請使用藍、黑原子筆，並於答案卷作答。
2. 填充題答案若為分數或根式，請化簡至最簡。
3. 計算、證明與論述題請標明題號，標示不清者不予計分。
4. 參考數值： $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$, $\log_{10} 7 = 0.8451$ 。

一、 填充題 (60 分，每格 5 分)

1. 在坐標平面上，已知函數 $y = \log x$ 與直線 $x = \frac{2a+1}{4-a}$ 圖形的交點在第一象限，試求實數 a 的範圍。_____。
2. 隨機將編號 1, 2, ..., 7 的七張卡片由左至右排成一列，恰有二張卡片所排的順序號與它的編號相同的機率為_____。
3. 坐標平面上，拋物線 $\Gamma: (y+2)^2 = -4x+4$ 及點 $A(1, -2)$ 。設 \overline{PQ} 為 Γ 的一焦弦且與其對稱軸夾 60° ，求 $\triangle APQ$ 的面積為_____。
4. 設 $\sec \theta + \csc \theta = 1$ ，求 $\sec \theta \csc \theta$ 之值為_____。
5. 已知空間中等腰梯形 $ABCD$ 的三個頂點坐標為 $A(1, -2, 2)$, $B(9, -6, 10)$, $D(3, 1, 6)$ ，其中 $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ，試求頂點 C 的坐標為_____。
6. 設 a, b 為正實數，已知 $a+b+\frac{1}{a}+\frac{9}{b}=10$ 有最小值時，則 $a+b$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，求數對 $(M, m) =$ _____。
7. 右圖為正四面體 $A-BCD$ 積木，稜長均為 8，設 \overline{CD} 邊上有一點 H ，且 $\overline{CH} : \overline{HD} = 1 : 3$ ，若 H 點上有一隻螞蟻要沿著積木表面走到對邊 \overline{AB} 的中點 N ，則牠所走的最短距離為_____。



8. 設邊長為 1 的正 $\triangle ABC$ 中， \overline{BC} 上有 n 等分點 P_1, P_2, \dots, P_{n-1} ，即 $\overline{BP_1} = \overline{P_1P_2} = \dots = \overline{P_{n-1}C}$ ，其中 $n \geq 2$ ，令向量內積和 $S_n = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_1} \cdot \overrightarrow{AP_2} + \dots + \overrightarrow{AP_{n-1}} \cdot \overrightarrow{AC}$ 。試求 S_n 的值（以 n 表示）_____。
9. 設 I 為單位矩陣，已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ， $P = \begin{bmatrix} s & 1 \\ t & 1 \end{bmatrix}$ ， $C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，且 $PA = BP$ ， $a, b, c, d, s, t \in R$ 。若 $ACA + PCP = ACP + PCA + I$ ，則 $a + d =$ _____。
10. 某次考試，老師出了一張滿分為 100 分的試卷，但因考後成績不理想，因此進行全班成績調整，若原始成績為 x 分，則調整後成績為 $50 \cdot \log_{10} x$ 的整數部分。已知這次考試沒有人缺考且最低分數為 2 分，則以這種方式，調整後最多能比原分數增加 k 分，求 k 之值為_____。
11. 已知複數 z 滿足 $|z + \sqrt{3}i| + |z - \sqrt{3}i| = 4$ ，則 $|z - i|$ 的最小值為_____。
12. 已知現有的 A、B、C、D、E、F 六戶人家的相對位置如右圖所示，除了 F、A 與 F、C 與 B、D 之間沒有道路相通外，其餘任兩戶之間均有道路相通。若小南希望從 A 出發後拜訪各戶恰一次後再回到 A（任兩戶間只走連接兩戶的直線道路），試問他的走法有_____種。



二、統測試題講解 (10 分)

1. 某一年數學測驗的題目如下：

空間中兩點 $A(-1, 4, 2)$ 與 $B(5, 1, 4)$ ，若 xy 平面上 P 點到 A 與 B 兩點的距離和為最小，則 P 點的坐標為何？

試寫出此題詳細的解題步驟，並加以說明你如何引導學生這一題的解法。

2. 某一年數學測驗的題目如下：

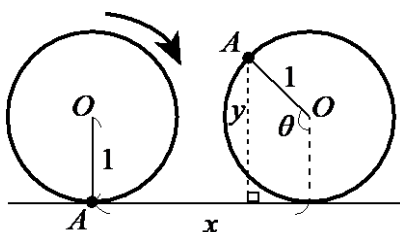
若 $P(x, y)$ 為橢圓 $4x^2 + 6y^2 - 12y - 6 = 0$ 上任意一點，則 $x + 3y$ 的最大值為何？

試寫出此題詳細的解題步驟，並加以說明你如何引導學生這一題的解法。

三、計算、證明題 (30 分)

1. 設 $x = \log \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ ，利用 $\sqrt{2}$ 是無理數，試證： 0.1^x 為無理數。

2. 有一個在水平地面上的圓形輪子，其半徑為 1 單位長。輪子上 A 點與地面接觸，如下圖所示，當輪子向右滾動，相對於圓心 O 而言，A 點以順時針轉動 θ 角，且輪子中心 O 前進 x 單位長的時候，A 點距離地面的高度為 y 單位長。在坐標平面上，若在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 的範圍中， y 可以表示為 x 的函數 $f(x)$ ，請畫出 $y = f(x)$ 的圖形？並求 $\int_0^{2\pi} f(x) dx = ?$



3. 已知兩多項式函數 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ 滿足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + g(x)}{x} = 7$ ， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + g(x)}{x \cdot f(x)} = 5$ 。

令函數 $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ ，則 $h'(0) = ?$

4. 設 a 、 b 為實數， $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$ 是一個三次函數，若方程式 $f(x) = 0$ 有兩個虛根 α 與 $\frac{\alpha^2 + 4}{2}$ ，試求：

(1) $|\alpha|$ 的值。

(2) $y = f(-x + 3)$ 的圖形的對稱中心。

試題結束