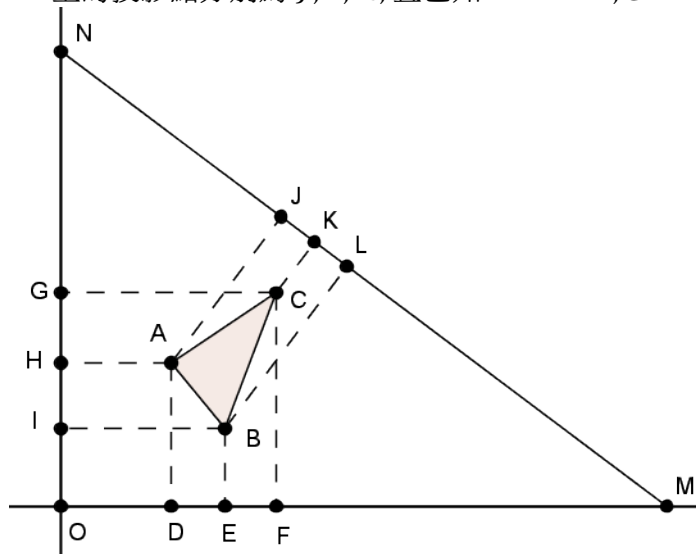


填充題

1. 設 $ABCD$ 為正四面體, $\triangle ABC$ 內部有一點 E , 點 E 到 $\triangle DAB, \triangle DBC, \triangle DCA$ 距離之和為 m , 點 E 到 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ 距離之和為 M , 求 $\frac{m}{M}$.
2. 已知 z 為複數, 且 $\frac{z}{z-1}$ 為純虛數, 求 $|z-i|$ 之最大值.
3. 已知 z_1, z_2 是複數, 且 $z_1 + z_2 = -\cos \theta, z_1^2 + z_2^2 = 3 - 2\csc^2 \theta - \sin^2 \theta$, 其中 $45^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$, 若 $|z_1|$ 的最大值為 M , 最小值為 m , 則數對 $(M, m) = ?$
4. 設 $f(x)$ 為多項式, 滿足 $xf(x-1) = (x-7)f(x)$, 且 $f(7) = 2 \times 7!$, 求 $f(x)$.
5. 過 $(0,0)$ 恰有三相異直線與 $y = x^3 + ax^2 + 1$ 相切, 則 a 之範圍為?
6. 有 8 位女生與 25 位男生圍成一圓圈, 在任 2 位女生中間至少有 2 位男生, 其排列方法數為 $\frac{a!b!}{c!}$ 種 ($a \leq b$), 則有序數組 $(a, b, c) = ?$
7. 如下圖, 已知 $O(0,0), M(4,0), N(0,3)$, 在 $\triangle OMN$ 內部有 $\triangle ABC$, A, B, C 三點在 x 軸上的投影點分別為 D, E, F , 在 y 軸上的投影點分別為 H, I, G , 在 \overline{MN} 上的投影點分別為 J, L, K , 且已知 $\overline{DE} = \overline{EF}, \overline{GH} = \overline{HI}, \overline{JK} = \overline{KL}$, 試求 $\cos \angle BAC$.



8. 設 a, b, c 為三相異實數, 已知 a, b, c 成等比數列, 且 $\log_a b, \log_b c, \log_c a$ 成等差數列, 試求上述等差數列的公差為何?

計算題

1. 設 a, b 為實數, 且 $x^2 - ax + b = 0$ 之兩根為 x_1, x_2 , 且 $-1 \leq x_1 \leq 1, 1 \leq x_2 \leq 2$.
 - (a) 設滿足上述條件之 (a, b) 所在之區域為 I , 在坐標平面上畫出 I 的圖形.
 - (b) 設 $u = x - 3y$, 其中 $x, y \in I$, 求 u 之最大值與最小值.
2. 已知 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心, 且 $\overline{AH} = l, \overline{BH} = m, \overline{CH} = n$, 三角形的三邊長 $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b, \overline{AB} = c$, 試證

$$\frac{a}{l} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} = \frac{abc}{lmn}.$$
3. 設三次函數 $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 + (b-1)x^2 + (2-a)x + 1$, 已知 $f(x)$ 無極值, 且對於任意實數 x 恆有 $f''(x) < |x|$, 求滿足條件之所有點 (a, b) 所圍之面積.
4. 雙曲線 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ 的焦點為 F_1, F_2 , 設 P 為 Γ 上的動點, 試問 $\triangle PF_1F_2$ 內心的軌跡為何? 並證明之!
5. 已知有甲、乙兩袋子, 甲袋中有一張 100 元與一張 50 元的鈔票, 乙袋有一張 100 元與兩張 50 元的鈔票, 每次自甲乙兩袋中各抽出一張鈔票換入對方得袋中稱為一局, 試問

- (a) 第三局結束時, 甲袋中有 150 元的機率為何?
- (b) 第三局結束時, 乙袋中的金額的期望值為何?
- (c) 長期換下去, 對甲是否有利?

6. 某次調查民衆對於行政院長施政滿意度的調查結果如下:

「本次調查有 4 成 2 的施政滿意度, 以台灣地區住宅電話簿為抽樣清冊, 並以電話號碼的尾二數進行隨機抽樣, 共成功訪 1083 位年滿 18 歲之成人. 在 95% 信心水準下, 抽樣誤差為正負 3 個百分點.」

(a) 如何對學生解釋以下之名詞:

- i. 4 成 2 的滿意度
- ii. 正負 3 個百分點
- iii. 95% 信心水準

(b) 若本次調查的抽樣總人數為 n , 滿意度為 \hat{p} , 試證明 95% 信心水準下的信賴區間為

$$\left[\hat{p} - 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

(c) 欲使 95% 信心水準下信賴區間的區間長度不超過 e , 則至少須抽樣多少樣本?