

數學科 試題卷

(請考生自填) 准考證號碼：_____ 姓名：_____

一、填充題(1 格 4 分，共 80 分)

1. 已知實數 α, β, γ 為方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 的三個根。求 $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$ 的值為 _____。

2. 設三階方陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，若 $B = A + A^2 + A^3 + \dots + A^{100} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ ，試求 $a + b + c + d + e + f + g + h + i$ 為 _____。

3. 若可微函數 $f(x)$ 滿足 $f(x) = x^2 + x \int_0^2 f(t) dt$ ，求 $f(x) =$ _____。

4. 已知兩直線 $L_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{a}$, $L_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$ ，若 L_1, L_2 的最近距離為 $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ ，試求 a 之值為何？

5. 在 $\triangle ABC$ 中，三邊長為 $\overline{AB} = 13, \overline{BC} = 14, \overline{CA} = 15$ 。現有一個半圓內接於 $\triangle ABC$ 中，其直徑落在 \overline{BC} 邊上，且半圓的弧與 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 兩邊皆相切。求此半圓的半徑 r 為 _____。

6. 求下列極限值：_____。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 + \cdots + (n+3n)^3}{n^4}$$

7. 求值： $\cos^6 \frac{\pi}{8} + \cos^6 \frac{3\pi}{8} + \cos^6 \frac{5\pi}{8} + \cos^6 \frac{7\pi}{8} =$ _____。

8. 試求 $\int_{-2\sqrt{3}}^2 (\sqrt{x^2-16} + 2026xe^{x^2}) dx$ 為何？

9. 求滿足方程式 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2026}$ ，且 $x \leq y$ 的正整數數對 (x, y) 共有_____組。

10. 在複數平面上的實數軸正向若有一點 z ，若 $z, z^2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ), z^3(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$ 的位置圍成的三角形面積等於 $\frac{\sqrt{3}(|z|^3+2)}{2(|z|-1)}$ ，試求 $|z|$ 值為何？

11. 已知三次函數 $f(x) = x^3 - 3x^2 + px + q$ 的對稱中心落在直線 $y = 2x - 1$ 上。若 $f(x)$ 的圖形與直線 $y = 2x - 1$ 有三個相異交點，求實數 p 的範圍 _____。

12. 已知實變數函數 $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ ，若此函數在 $x \in \mathbb{R}$ 時的最大值為 M ，最小值為 m ，求 $M - m$ 之值 _____。

13. 一密室逃脫遊戲的房間內有三扇門：

- 一號門：走 5 分鐘 後會回到原房間。
- 二號門：走 3 分鐘 後會回到原房間。
- 三號門：走 2 分鐘 後可以順利逃出迷宮。

每次進入房間玩家須擲一公正骰子決定走哪一扇門，若擲出奇數點則走一號門，若擲出 2 點或 4 點則走二號門，其餘點數則走三號門，請問此時逃出這個迷宮的期望時間是多少分鐘？ _____。

14. 已知 $z + \frac{1}{z} = 2 \cos 15^\circ$ ，求 $z^{2026} + \frac{1}{z^{2026}}$ 的值 _____。

15. 設 x 為實數，試求 $y = \log_3 \left| \frac{\left(\frac{4-\sqrt{3}}{2}\right)x^2 - \sqrt{3}x}{x^2+x+1} \right|$ 的範圍為何？

16. 學校長廊上有 100 扇初始狀態皆為「關閉」的置物櫃門，編號從 1 到 100。現在有 100 位同學排成一列，準備依序走過長廊執行以下動作：

- 第 1 位同學走過去，將所有編號為 1 的倍數的門改變狀態（打開）。
- 第 2 位同學走過去，將所有編號為 2 的倍數的門改變狀態（打開的關上，關上的打開）。
- 第 3 位同學走過去，將所有編號為 3 的倍數的門改變狀態。
- 依此類推，第 n 位同學會將所有編號為 n 的倍數的門改變狀態。

最後檢查時發現，第 9 位同學非常調皮。他經過所有「9 的倍數」的門時，並沒有乖乖只拍一次，而是連續拍了「兩次」（也就是快速地開再關，或是關再開）。其他的同學則都完全遵守原本的規則。問題：最後長廊上到底有幾扇門是呈現「打開」的狀態？_____。

17. 有一座 10 階的樓梯，每次可以選擇跨 1 階或跨 2 階。為確保安全，規定「不能連續兩次都跨 2 階」。請問共有 _____ 種不同的上樓方法。

18. 方程式 $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$ 的實數解為 _____。

19. 已知實數 $a > 1$, $k > 0$ 。直線 $L: x + y = k$ 分別與 $y = a^x$ 及 $y = \log_a x$ 的圖形交於 P, Q 兩點。設 O 為原點，若線段 $\overline{PQ} = 4\sqrt{2}$ ，且 $\triangle OPQ$ 面積為 12，求 a, k 之值。_____。

20. 已知 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ ，若 $f(x) = \frac{2 \sin x + 2 \cos x + 4}{\sin x + \cos x + 1}$ ，試求 $f(x)$ 的範圍為_____。

二、計算證明題(共 20 分)

1. 若 $X \sim B(n, p)$ ，則 $E(X^3)$ 為何？請寫成 $a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0$ 的形式。
(可利用已知條件 $E(X) = np, \text{Var}(X) = np(1-p)$ 進行計算) (10 分)

2. 證明：若 p 為奇質數，已知一個「整數數列」 $L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ ， n 為正整數。

試證明 $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^p + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^p$ 除以 p 之餘數為 1。

(可利用 Lucas 定理：若 p 為質數且 $0 < k < p$ 、 k 為正整數，組合數 C_k^p 為 p 的倍數。)(10 分)