臺北市立永春高級中學115學年度第四次正式教師甄選數學科試題

※請標明題號，並於答案卷上作答；計算題需寫出過程。

一、填充題（每格7分，共70分）

1. 設a,b為實數，$i=\sqrt{-1}$，則滿足$(a+bi)^{2025}=a-bi$的數對(a,b)有__________組。

2. 袋中有4顆黑球、3顆白球、2顆紅球，每球被取到的機率均等。現從袋中取出球，一次取一球且取後不放回，則紅球先被取完的機率為__________。

3. 在ΔABC中，$\overline{BC}=7$，$\sin(\angle B+\angle C)=\frac{\sqrt{15}}{4}$，若$\overline{CD}$、$\overline{BE}$分別是$\overline{AB}$、$\overline{AC}$上的高，則$\overline{DE}$之長為__________。

4. 複數數列$\{z_n\}$之生成方式如下：投擲一枚公正硬幣，若出現正面，則$z_n=2z_{n-1}$；若出現反面，則$z_n=iz_{n-1}$，其中$i=\sqrt{-1}$。若給定$z_0=1$，則$z_5=2$的機率為__________。

5. 已知函數$f(x)$滿足$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right)+f\left(\frac{3+x}{1-x}\right)=x$，其中$x^2\neq 1$，則$f(2)$之值為__________。

6. 平面上，O為原點，橢圓$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$上有一動點$P$。過$P$對圓$x^2+y^2=1$作切線，設切點為$Q_1$、$Q_2$，則四邊形$OQ_1PQ_2$的面積最大值為__________。

7. 空間坐標系中有一個球面S，其球心為$O(0,0,0)$、半徑為1。球面上有相異三點A,B,C形成正三角形，已知$A(1,0,0)$、$B(a,\sqrt{1-a^2},0)$，則a的取值範圍為__________。

8. 求方程式$x^{2026}-x^{2024}-x^{2022}-\cdots-x^2-2=0$的所有實根之平方和為__________。

9. 有一光源從拋物線$y=x^2$上、位於第一象限的點P處，發射一束雷射光射向焦點F，光束經對稱軸反射後，碰到拋物線上的另一點Q。設$\overline{PF}=a$、$\overline{QF}=b$，則$a+4b$的最小值為__________。

10. 平面上有一個ΔOAB，其中M,N是$\overline{AB}$上的三等分角點，即$\theta=\angle AOM=\angle MON=\angle NOB=\frac{1}{3}\angle AOB$。若內積之連比$(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}):(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OB}):(\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OB})=1:2:3$，則$cos\theta$之值為__________。

二、計算題（每題15分，共30分）

1. 設n為正整數且$n\geq 2$，a為實數，函數$f(x)=n\cdot lnx$與$g(x)=ax^n$的圖形相切於點P，請回答下列問題：

   (1) 求實數a之值。

   (2) 令S_n表示由$f(x)$、$g(x)$的圖形與x軸所圍成的封閉區域面積，請以n的形式表示S_n。

   (3) 求$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$之值。

2. 設n為正整數，現以$d(n)$表示n的正因數個數，並令$f(n)=\frac{d(n)}{\sqrt{n}}$。舉例來說，15的正因數有1,3,5,15，故$d(15)=4$，$f(15)=\frac{4}{\sqrt{15}}$。請回答下列問題：

   (1) 若質數p與正整數k滿足$f(p^k)\leq f(p^{k+1})$，求滿足條件的數對(p,k)。

   (2) 求$f(n)$的最大值，以及此時的n值。