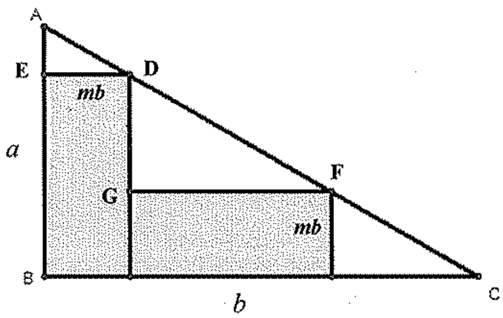
台北市立建國高級中學九十九學年度教師甄選數學科筆試試題

一、 填充題：63% (共 9 題，每題 7 分)

1. 求使得 $2^n+2^{16}+2^{19}$ 爲完全平方數的正整數 n=__________。

2. 將 n^2 個正數排成一個 $n\times n$ 階方陣，其中每一列的數成等差，每一行的數成等比，且所有的公比皆相等。已知 $a_{24}=1$， $a_{42}=\dfrac{1}{8}$，$a_{43}=\dfrac{3}{16}$，$S=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$，若 $S+\dfrac{1}{2^{10}}$ 的和爲一正整數，則 n 之值爲__________。

3. 如圖，兩個全等之矩形置於一直角三角形內，並使其一長邊各與三角形之一股重合。設兩股長 a,b 可以調整，又設矩形短邊長爲 mb，則 m 之最大值爲__________。



4. 若兩圖形 $y=f(x)=a^x$ 與 $y=g(x)=\log_a x$ 有唯一的交點，則不爲 1 的正實數 a 之範圍爲__________。

5. 已知 H_m^n 表示「自 n 種(每種多個)不同元素中任取 m 個(可重複選取)」之組合數；C_m^n 表示「自 n 個不同元素中任取 m 個」之組合數。若 $H_{10}^n=\sum\limits_{k=1}^{10}(a_k\cdot C_k^n)$ 對於 $\forall\, n\geq 10$ 恆成立，若 $x=a_3$， $y=\sum\limits_{k=1}^{10}a_k$ ，求數對 (x,y)=__________。

6. 試問曲線 $x^2+y^2-6x=6\sqrt{x^2+y^2}$ 上的 $P(x,y)$ 有多少個點與 $A(8,0)$ 距離是整數？________。

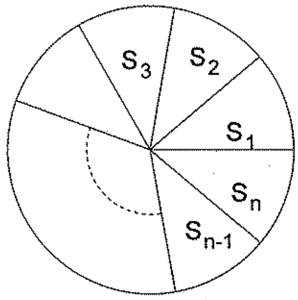
7. 某特徵(如拇指是否可以彎曲)是根據一對基因來分類的，若 A,a 分別代表顯性及隱性基因，則某人有 AA 之基因稱爲純顯性，Aa(同於 aA)稱爲混合型，aa 稱爲純隱性。外觀上，Aa 和 AA 都有這個特徵。孩子從父母各得一因子，假設 AA , Aa , aa 之人口比例分別爲 $\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4}$ ，且婚配與否和此特徵無關。若有一對夫妻他們 4 個小孩中有 3 個具顯性特徵，求此對夫妻皆爲混合型之機率爲 __________。

8. 已知 A、B、C 為橢圓 Γ：$x^2+3y^2=156$ 上三相異點，若 A 點之坐標為 $(12,-2)$ 且 ΔABC 有最大面積，則 $\overline{BC}$ 邊之長為__________。

9. 若 $\dfrac{n}{100}<2\cos\dfrac{2\pi}{7}<\dfrac{n+1}{100}$ ，$n\in N$ ，則 $n=$____________。

二、 計算證明題：37%

1. (12%)
地圖上某一地區有 $n\,(n\geq 3)$ 個國家相鄰，但 n 個國家只有一個公共點（如右圖）。現用紅，黃，綠、藍四種顏色給地圖染色，但使相鄰的國家顏色不同，滿足上述染色規則的方法有 a_n 種。
(1) 試求 a_3、a_4 的值。
(2) 試求數列 $\{a_n\}$ 的遞迴關係式。
(3) 求出 a_n 的一般項。



2. (15%)
在教「算術平均數 ≥ 幾何平均數」時，若遇到下列題目：「設 $x\geq 0$，$y\geq 0$，$x+y=2$，求 4^x+8^y 的最小值=？此時 $(x,y)=$？」(1)根據您的教學經驗請舉出兩種學生的解答可能產生錯誤的類型？ (2) 您要如何教導學生正確求解這道問題？

3. (10%)
設 $xy-$平面為 H，球面 S 的方程式為 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ ，$P(0,0,2)$ 是球面 S 上一點。
設函數 ϕ ：$\mathrm{H}\to\mathrm{S}$ ，若 R 為 H 上任一點，定義 $\phi(R)$ 為球面 S 與 $\overline{RP}$ 的交點 Q (異於 P)（如圖）。若 L 是 H 上任一直線，試判斷 $\phi(\mathrm{L})$ 的圖形為何？並證明您的結論。