

台北市立南港高工九十九學年度教師甄選數學科試題

一、計算題：(1~10 題每題 6 分，11~15 題每題 8 分)

- 1 某教師辦公室共有 28 位教師，以抽籤方式分配下列水果：橘子 12 個，芭樂 18 個，蓮霧 3 個，水蜜桃 2 個，香蕉 6 根，鳳梨 3 個。已知每位教師都至少抽到一種水果，且其中抽得兩個水果的人數為 13 人，試問，這間辦公室的教師中抽得最多水果的人最多可得到多少水果？

解：4 個水果。

- 2 一個質點由數線上的原點出發，假設該質點每次運動只能右移一步或左移一步（一步為一個單位的距離），沿著數線的正向以進 4 步後再退 3 步的方式運動。以  $x_n$  表示第  $n$  步質點在數線上的座標，例如  $x_1 = 1$ ， $x_2 = 2$ ， $x_5 = 3$ ，求  $x_{2010}$ 。

解： $x_{2010} = 288$

- 3 假設正實數等比數列  $\{a_n\}$ ，公比不為 1。試求  $\log_{a_{11}a_{50}}(a_1a_2\cdots a_{60})$  的值。

解： $\log_{a_{11}a_{50}}(a_1a_2\cdots a_{60}) = 30$

- 4 求直線  $L: (2m+1)x + (m+1)y = 7m+4$ ，與圓心為  $A(1,2)$  半徑為 3 的圓，所截的最短弦長為多少？

解：弦長為 4

- 5 十進位制的三位數字  $\overline{abc}$  中， $a, b, c$  成等差數列，求這種三位數的最大質因數。（十進位制的三位數  $\overline{abc} = a \times 10^2 + b \times 10^1 + c$ ）

解：317

- 6 已知一個十進位制的三位數  $\overline{xyz} = x! + y! + z!$ ，求  $x + y + z$ 。

解：10

- 7 已知函數  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$  在區間  $[a, b]$  上，取值  $[a, b]$ ，求滿足條件的區間  $[a, b]$

解：可以選擇三個區間  $[0, 1]$  或  $[0, 2]$  或  $[1, 2]$

8 求  $\frac{1}{\cos 290^\circ} + \frac{1}{\sqrt{3} \sin 250^\circ}$  的值。

解：  $\frac{4}{3}\sqrt{3}$

9 投擲四粒骰子，求其中恰有兩粒骰子的和為 9 的機率。

解：所求的機率為  $\frac{7}{27}$

10  $a \in \mathbb{Z}$ ，關於  $x$  的方程式  $\frac{x^2}{x^2+1} + \frac{4|x|}{\sqrt{x^2+1}} = a-3$  有實數解。求  $a$  值。

解： 故  $a$  可能為 3, 4, 5, 6, 7

11 將自然數  $n$  接在任何一個自然數的右邊，都能被  $n$  整除（例如將 2 接在任何自然數的右邊，均可被 2 整除），則稱  $n$  為魔術數。求小於 300 的魔術數的個數。

解：有 11 個。

12 有一個 100 列的數表，第一列為 1, 2, 3, ..., 100；第二列為 3, 5, 7, ..., 199；第三列為 8, 12, 16, ..., 396；第四列為 20, 28, 36, ..., 788；...（每個數都是其肩膀上的兩個數的和），求最後一列的數的值。

解：  $101 \times 2^{98}$

13 一個最簡分數等於分母分別為 600 及 700 的兩個最簡分數的和，求這樣的最簡分數的分母的最小值。

解： 168

14 已知函數  $f(x+1)$  及  $f(x-1)$  都是奇函數，且  $f(2)=3$ 。求  $f(-50)$  的值。

解：  $f(-50)=3$

15 設  $[x]$  表示不大於  $x$  的最大整數，求  $\left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2010} \right]$  除以 7 的餘數。

解：所求的餘數為 4