教育部受託辦理 99 學年度國立高級中等學校教師甄選

數學科 答案（含試題）

請注意：本試題共兩部分：選擇題 10 題，及綜合題二大題，共計 100 分。**選擇題請用 2B 軟心鉛筆在答案卡劃記，綜合題請用藍色或黑色鋼筆或原子筆在答案卷上作答。**本科不可以使用電子計算器

第一部分：選擇題（每題4分，共 40 分）

(C)1. 平面上，設$A(0,4)$，$B(0,9)$，P在正向x軸上移動，設$\angle APB=\theta$，則$\tan\theta$之最大值為

(A)$\frac{5}{6}$ (B) 1 (C) $\frac{5}{12}$ (D)$\frac{7}{5}$ 。

(A)2. 函數 $y=\sqrt{3}\sin(3x+\pi)\cos(3x-\pi)$ 是

(A)週期為$\frac{\pi}{3}$的奇函數 (B)週期為$\frac{\pi}{3}$的偶函數 (C)週期為$\frac{\pi}{6}$的奇函數 (D)週期為$\frac{\pi}{6}$的偶函數。

(B)3. 設有一球，其表面積以每秒1平方公分的變化率增加，則在半徑為3公分時，其體積的瞬間增加率為每秒多少立方公分？

(A)$\frac{1}{2}$ (B)$\frac{3}{2}$ (C)2 (D)$\frac{8}{3}$ 。

(D)4. 已知$\pi<\theta<2\pi$，則複數$1+i\cot\theta$的極式為

(A)$\frac{1}{\sin\theta}[\sin(-\theta)+i\cos(-\theta)]$ (B) $\frac{1}{\sin\theta}[\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)+i\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)]$

(C) $\frac{-1}{\sin\theta}[\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)+i\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)]$ (D) $\frac{-1}{\sin\theta}[\cos(\frac{3\pi}{2}-\theta)+i\sin(\frac{3\pi}{2}-\theta)]$ 。

(A)5. 小明上樓梯時可能一步上一階或一步上兩階，但不會連續兩步都上兩階。今小明走一個12階的樓梯，則上樓梯的方式共有

(A)88 (B)89 (C)90 (D)91。

(C)6. 設n為自然數，且$\frac{n^3-3n^2+5n-13}{n-3}$為質數，則滿足上述條件之所有自然數$n$的總和為

(A)10 (B)11 (C)12 (D)13。

(D)7. 設$\overline{u},\overline{v},\overline{w}$是空間向量且$\overline{u}\cdot(\overline{v}\times\overline{w})=6$，則三向量$2\overline{v}+\overline{w},3\overline{u}-\overline{v}+2\overline{w},4\overline{u}+\overline{w}$所張開的立體體積為

(A)54 (B)66 (C)72 (D)84。

(C)8. 已知三次函數$y=x^3+ax^2+bx+c$之圖形與拋物線$y=x^2$之圖形交於相異三點$P(-1,y_1)$、$Q(\frac{1}{2},y_2)$、$R(x_3,y_3)$，且$\overline{PQ}$垂直$\overline{QR}$，則$a+b+c=$

(A)0 (B)$\frac{1}{2}$ (C)$-\frac{1}{2}$ (D)$-\frac{1}{4}$

(A)9. 若某橢圓的兩焦點為$(0,0)$、$(0,4)$，且此橢圓與直線$x+y+1=0$相切，則此橢圓的長軸長為

(A)$\sqrt{26}$ (B)$\sqrt{23}$ (C)$\sqrt{22}$ (D)$\sqrt{17}$

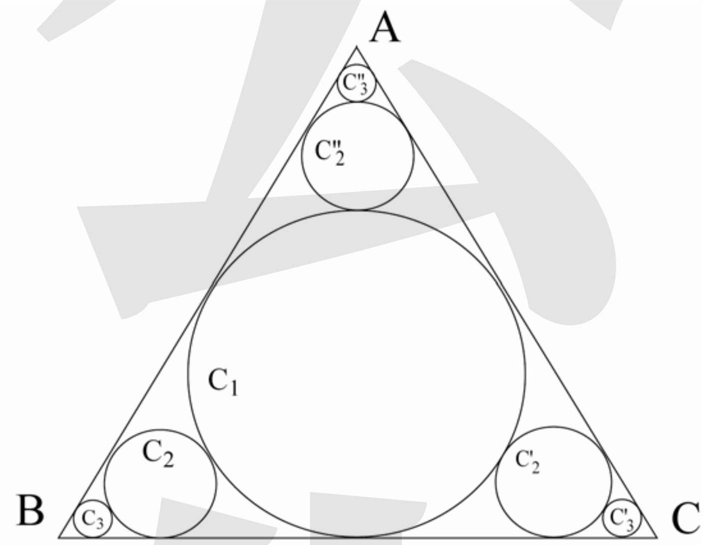
(D)10. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}=$

(A) $\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$ (B) $\ln 2$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D)$\frac{1}{2}\ln 2$ 。

第二部分：綜合題

一、填充題：（每題 5 分，共 10 分）

1. 設ΔABC 是一個正三角形，圓C_1 是 ΔABC 的內切圓，圓C_2 與$\overline{AB}$、$\overline{BC}$及圓C_1 相切，圓C_3與$\overline{AB}$、$\overline{BC}$及圓C_2相切，依此方式一直進行下去可以得到圓C_1、C_2、C_3 …。再依相同方式，可以得到圓C_2'、C_3' …，以及圓C_2''、C_3''…，如下圖所示。如果 ΔABC 的邊長是 a，則這些圓的面積總和為$\underline{\dfrac{11\pi}{96}a^2}$。



2. 空間中一四面體的四頂點分別為$A(0,0,1)$，$B(2,4,0)$，$C(0,0,0)$，$D(4,2,0)$，平面E將此四面體分成兩塊，其中一塊的體積為原四面體的$\dfrac{1}{3}$，則E的方程式為$\underline{5x-7y-6z+6=0}$。

二、計算及證明題：（每題 10 分，共 50 分）

1. 若函數$f(x)=a^x-\dfrac{5}{2}a+6$的反函數$f^{-1}(x)$的圖形通過點$(5,2)$，且在區間$(\dfrac{23}{4},\infty)$內恆有$f^{-1}(x)<0$，試求反函數$f^{-1}(x)$。

2. 設α與β是相異兩實數，並且$\alpha>\beta>0$。定義數列$\langle a_n\rangle$如下：

$$a_1=\alpha+\beta\text{；當 }n\geq 2\text{ 時，}a_n=\alpha+\beta-\frac{\alpha\beta}{a_{n-1}}$$

(1)試證：$a_n=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha^n-\beta^n}$ (5 分)

(2)求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=?$ (5 分)

3. 設正三角形邊長為1，試證：由此正三角形內部任取5點，至少有兩點的距離小於或等於$\dfrac{1}{2}$。

4. 已知對於所有的$t\geq 0$，曲線$y=f(x)$與x軸，y軸及直線$x=t$所圍成區域繞x軸旋轉所得之立體體積為t^3+3t，試求$f(x)$。

5. 試敘述並證明：整係數多項式一次因式檢驗法。