國立南科國際實驗高級中學
九十八學年度第一次教師甄選
高中部數學科試題卷

一、　填充題：(每題 6 分，共 60 分)

1. 設空間中兩直線 $L_1:\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{3}$ 與 $L_2:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+3}{5}=\dfrac{z-2}{4}$，求此兩直線的最短距離為__________________。

【解】 設直線 L 為 L_1、L_2 的公垂腺，交點分別為 P(2t+4,4t+1,3t+1)；Q(2s+3,5s-3,4s+2)

$\overrightarrow{PQ}$=(2s-2t-1,5s-4t-4,4s-3t+1)

$\because \overrightarrow{PQ}\perp L_1$，$\therefore$2×(2s-2t-1)+4×(5s-4t-4)+3×(4s-3t+1)=0，$\therefore$36s-29t=15

$\because \overrightarrow{PQ}\perp L_2$，$\therefore$2×(2s-2t-1)+5×(5s-4t-4)+4×(4s-3t+1)=0，$\therefore$45s-36t=18

$\therefore$s=-2 , t=-3，P(-2,-11,-8)；Q(-1,-13,-6)，$\overline{PQ}=3$

兩歪斜線 L_1 與 L_2 的最短距離為 3。

2. 設三角形之三頂點 A(1,n)、B(n,1)、C($\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}$)，若 A_n 表示ΔABC 的面積，則

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A_n}{n^2}=$__________。

【解】 $\overrightarrow{AB}$=(n-1,1-n)，$\overrightarrow{AC}=(\dfrac{1}{n}-1,\dfrac{1}{n}-n)=(\dfrac{1-n}{n},\dfrac{1-n^2}{n})$

$$\Delta ABC\text{ 的面積}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} n-1 & 1-n \\ \dfrac{1-n}{n} & \dfrac{1-n^2}{n}\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{(1-n^2)(n-1)}{n}-\frac{(1-n)(1-n)}{n}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{(1-n)^2(-n-1-1)}{n}\right|$$

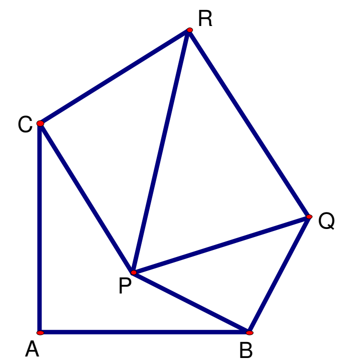
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{n^2}=\frac{1}{2}$$

3. 設ΔABC 爲直角三角形，其中∠A 爲直角。令 G 爲ΔABC 的重心，O 爲ΔABC 的外心。若 $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AB}=k\cdot|\overrightarrow{AB}|^2$，求 k =___________

【解】

$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AB}=(-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}$，$\therefore$ $k=-\frac{1}{6}$

4. 如右圖，若$\overline{AB}=\overline{AC}=7\sqrt{2}$，$\overline{CP}=\overline{CR}=10$，$\overline{BP}=\overline{BQ}=6$，∠CAB=∠RCP=∠PBQ=90°，則ΔPQR 的面積=___________



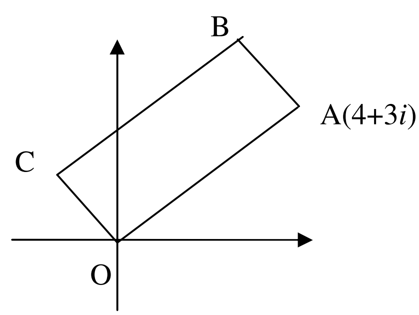
【解】連接 BC，$\overline{BC}=14$

$$\cos(\angle BPC)=\frac{6^2+10^2-14^2}{2\cdot 6\cdot 10}=-\frac{1}{2}$$

∠BPC=120°，∠QPR=30°

ΔPQR 的面積$=\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}\cdot 10\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=30$

5. 如右圖，在複數平面上四邊形 $OABC$ 爲一個矩形，若 $A(4+3i)$，$\overline{OC}=2$，求點 B 對應的複數爲__________。



【解】

$\overline{OA}=5$，$\cos\angle AOB=\frac{5}{\sqrt{29}}$，$\sin\angle AOB=\frac{2}{\sqrt{29}}$

點 B 對應的複數爲

$$\frac{\sqrt{29}}{5}(4+3i)(\frac{5}{\sqrt{29}}+\frac{2}{\sqrt{29}}i)=\frac{1}{5}(4+3i)(5+2i)=\frac{1}{5}(20+8i+15i-6)$$

$$=\frac{14+23i}{5}$$

6.設資料 X 共有 10 筆($x_1, x_2, ---, x_{10}$)，$\overline{X}$ 、S_X 分別表示其平均數、標準差；

資料 Y 共有 10 筆($y_1, y_2, ------, y_{10}$)，$\overline{Y}$ 、S_Y 分別表示其平均數、標準差。

已知 $\overline{X}$ =7、$\overline{Y}$ =3，X 與 Y 的相關係數 r＝1 且 Y 對 X 的迴歸直線(最佳直線)通過

點(0,2)，則 $\dfrac{S_Y}{S_X}$ = ________。

【解】　設 Y 對 X 的迴歸直線爲 y=ax+b，通過點(0,2)

$$b=\overline{Y}-\frac{S_{xy}}{S_{xx}}\cdot\overline{X}=2\Rightarrow 3-\frac{S_{xy}}{S_{xx}}\cdot 7=2\Rightarrow S_{xx}=7S_{xy}$$

X 與 Y 的相關係數 r＝1，

$$\therefore r=\frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}}\cdot\sqrt{S_{yy}}}=1\Rightarrow (S_{xy})^2=S_{xx}\cdot S_{yy}\Rightarrow S_{yy}=\frac{1}{7}S_{xy}$$

$$\frac{{S_Y}^2}{{S_X}^2}=\frac{S_{yy}}{S_{xx}}=\frac{\frac{1}{7}S_{xy}}{7S_{xy}}=\frac{1}{49}\ ,\quad \frac{S_Y}{S_X}=\frac{1}{7}$$

7.一個袋子中有 12 個黑球 8 個白球，自袋中任意取出一球，取出後放回，連續取十次，每次皆取出放回後再繼續取球，每個球被取到的機會均等，試問這 10 次的取球過程中，黑色球被取出的次數________次的機率最高。

【解】

$$[(n+1)\times p]=[11\times\frac{3}{5}=\frac{33}{5}=6.6]=6$$

∴出現正面次數 6 次 的機率最高

8. 設甲箱內有 2 白球 1 紅球，乙箱內有 2 白球，現在每次同時自各箱中隨機取出一個球交換，則經過無限次交換後，紅球在甲箱內之機率爲________。

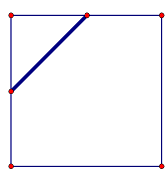
【解】由題意可知轉移矩陣爲$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

若 x, y 滿足 $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,且$x+y=1$，則 $x=\frac{3}{5}$ 。

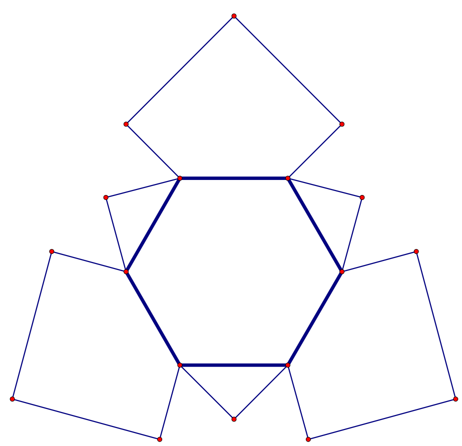
所以紅球在甲箱內之機率爲 $\frac{3}{5}$

9. 如下圖一，將三個邊長爲 12 的正方形紙片，取其中相鄰兩邊中點的連線切成一個等腰直角三角形和一個五邊形排成如下圖二。若將下圖二中的粗線向上折成一角錐多面體，求此角錐多面體的體積是___________

圖一



圖二

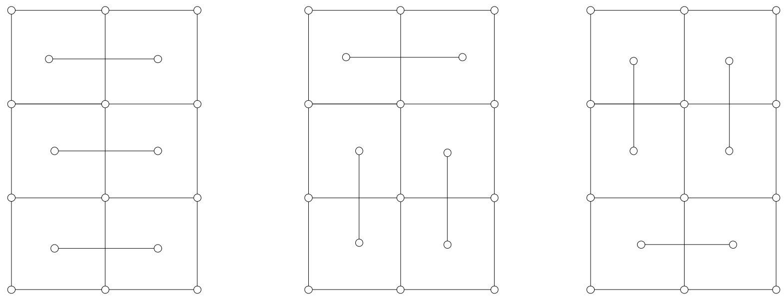


【解】$h=\sqrt{(9\sqrt{2})^2-(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 6\sqrt{2})^2}=6\sqrt{3}$

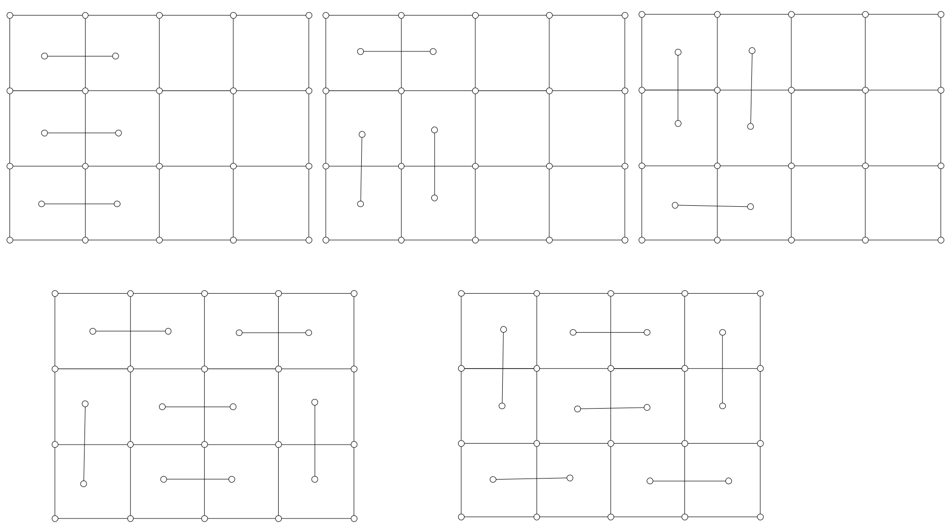
$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(18\sqrt{2}^2\right)\cdot 6\sqrt{3}=972$ ，$972\times\frac{1}{27}\times 3=108$

$972-108=864$

10.如圖一，用 3 個 **1×2** 的矩形來拼成 3×**2** 的矩形有 3 種方法;如圖二，用 6 個 **1×2** 的矩形來拼成 3×4 的矩形有 11 種方法(11=3*3+2)，試問用 15 個 **1*2** 的矩形來拼成 3×10 的矩形有_______ 種方法。



圖一



圖二

【解】設用1×2的方格矩形完全覆蓋$3\times 2n$的矩形有a_n種方法

$a_1 = 3$

$a_2 = 3a_1 + 2 = 11$

$a_3 = 3a_2 + 2a_1 + 2$

$a_4 = 3a_3 + 2a_2 + 2a_1 + 2$

。。。。。

$a_{n-1} = 3a_{n-2} + 2a_{n-3} + 2a_{n-4} + \Lambda + 2a_1 + 2$

$a_n = 3a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2a_{n-3} + \Lambda + 2a_1 + 2$

$\therefore a_n - a_{n-1} = 3a_{n-1} - a_{n-2}$

$a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$

$x^2 - 4x + 1 = 0$

$\Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$

$$\therefore a_n = \alpha(2+\sqrt{3})^n + \beta(2-\sqrt{3})^n$$

$$a_1 = \alpha(2+\sqrt{3}) + \beta(2-\sqrt{3}) = 3$$

$$a_2 = \alpha(2+\sqrt{3})^2 + \beta(2-\sqrt{3})^2 = 11$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{3+\sqrt{3}}{6}, \beta = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

$$\therefore a_n = \frac{3+\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}(2-\sqrt{3})^n$$

得$\therefore a_{10} = \frac{3+\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})^7 + \frac{3-\sqrt{3}}{6}(2-\sqrt{3})^7$=7953

填充題第10題原公布答案為7953更正為571

二、　計算證明題：(每題 10 分，共 40 分)

1. 設 $a>0$，曲線 $y=x^2-ax$ 與 x 軸所圍成的區域為 R，將區域 R 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體體積為 A；區域 R 繞 y 軸旋轉所得的旋轉體體積為 B。若 A=B，求 a 的值是多少？

【解】

$$A=\pi\int_0^a (x^2-ax)^2\,dx=\pi[\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{4}ax^4+\frac{1}{3}a^2x^3]\Big|_0^a=\frac{1}{30}\pi a^5$$

$$x^2-ax-y=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{y+\frac{1}{4}a^2}$$

$$B=\pi\int_{\frac{-1}{4}a^2}^{0}[(\frac{1}{2}a+\sqrt{y+\frac{1}{4}a^2})^2-(\frac{1}{2}a-\sqrt{y+\frac{1}{4}a^2})^2]dx$$

$$=\pi\int_{\frac{-1}{4}a^2}^{0}[2a\sqrt{y+\frac{1}{4}a^2}]dx=2a\pi g\frac{2}{3}\bullet(y+\frac{1}{4}a^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{-1}{4}a^2}^{0}=\frac{1}{6}\pi a^4$$

$\because$A=B ，$\therefore a$ 的值是 5

2. 設 a,b,c 為正實數，且 $abc=1$，請證明：$\dfrac{1}{a^3(b+c)}+\dfrac{1}{b^3(c+a)}+\dfrac{1}{c^3(a+b)}\geq\dfrac{3}{2}$

[解]：

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}$$

$$=\frac{1}{2a}\cdot\frac{2}{a^2(b+c)}+\frac{1}{2b}\cdot\frac{2}{b^2(c+a)}+\frac{1}{2c}\cdot\frac{2}{c^2(a+b)}$$

$$\geq\frac{1}{2a}\cdot[2-\frac{a^2(b+c)}{2}]+\frac{1}{2b}\cdot[2-\frac{b^2(c+a)}{2}]+\frac{1}{2c}\cdot[2-\frac{c^2(a+b)}{2}]$$

$$=\frac{1}{a}-\frac{a(b+c)}{4}+\frac{1}{b}-\frac{b(c+a)}{4}+\frac{1}{c}-\frac{c(a+b)}{4}$$

$$=bc+ca+ab-\frac{ab+bc+ca}{2}=\frac{ab+bc+ca}{2}\geq\frac{3}{2}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\frac{3}{2}$$

(另解)

$$\because\ [\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}][\,a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)\,]\geq(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{(\frac{ab+bc+ca}{abc})^2}{2(ab+bc+ca)}\geq\frac{ab+bc+ca}{2}\geq\frac{3}{2}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\geq\frac{3}{2}$$ 。

3. 空間中的相異三平面 E_1、E_2、E_3 分別為 $\begin{cases}E_1: a_1x+b_1y+c_1z=d_1\cdots(1)\\E_2: a_2x+b_2y+c_2z=d_2\cdots(2)\\E_3: a_3x+b_3y+c_3z=d_3\cdots(3)\end{cases}$，

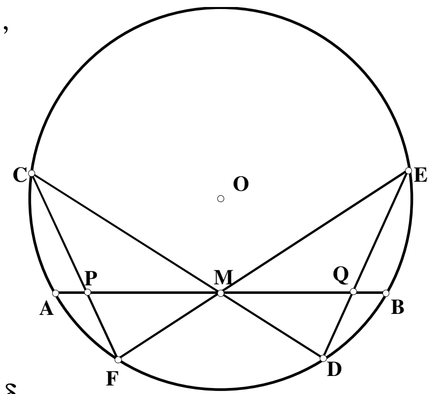
令$\Delta=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix}d_1&b_1&c_1\\d_2&b_2&c_2\\d_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix}a_1&d_1&c_1\\a_2&d_2&c_2\\a_3&d_3&c_3\end{vmatrix}$，$\Delta_z=\begin{vmatrix}a_1&b_1&d_1\\a_2&b_2&d_2\\a_3&b_3&d_3\end{vmatrix}$

若三平面，E_1、E_2、E_3 三平面交於一直線，試證：$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$

【解】(課本定理證明)

4.　過圓中 AB 弦的中點 M 引任意兩弦 CD 和 EF，連接 C,F 和 E,D 分別交 AB 於 P,Q，則 PM=MQ。

【解】



[證明一]：設$\overline{PM}=x$，$\overline{MQ}=y$，$\overline{AM}=\overline{MB}=a$

從面積的觀點

$$\Rightarrow\frac{\Delta CMP}{\Delta QEM}\cdot\frac{\Delta QEM}{\Delta PFM}\cdot\frac{\Delta PFM}{\Delta QDM}\cdot\frac{\Delta QDM}{\Delta CMP}=1$$

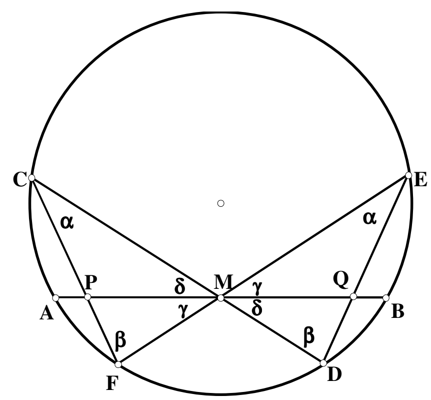
$$\Rightarrow\frac{CM\cdot CP\cdot\sin\alpha}{EM\cdot EQ\cdot\sin\alpha}\cdot\frac{EM\cdot MQ\sin\gamma}{MP\cdot MF\cdot\sin\gamma}\cdot\frac{FP\cdot FM\cdot\sin\beta}{DQ\cdot DM\cdot\sin\beta}\cdot\frac{MQ\cdot MD\cdot\sin\delta}{MC\cdot MP\cdot\sin\delta}=1$$

$\Rightarrow CP\cdot FP\cdot(MQ)^2=EQ\cdot DQ\cdot(PM)^2$

$\Rightarrow CP\cdot FP=AP\cdot PB=a^2-x^2$，$EQ\cdot DQ=AQ\cdot QB=a^2-y^2$

$\Rightarrow(a^2-x^2)y^2=(a^2-y^2)x^2$

$\Rightarrow x^2=y^2\Rightarrow x=y$。



[證明二]：設$\overline{PM}=x$，$\overline{MQ}=y$，$\overline{AM}=\overline{MB}=a$

過 P 分別對$\overline{CD}$、$\overline{EF}$作垂線，垂足點為 G、H

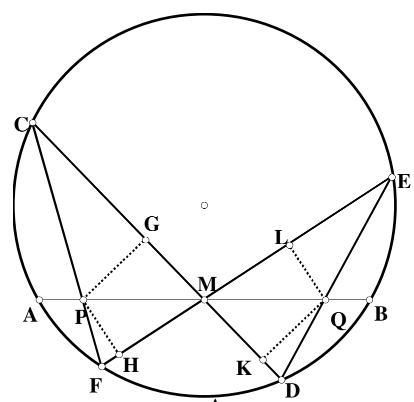
過 Q 分別$\overline{CD}$、$\overline{EF}$作垂線，垂足點為 K、L

$$\frac{x}{y}=\frac{PG}{QK}=\frac{PH}{QL}$$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{y^2}=\frac{PG\cdot PH}{QK\cdot QL}=\left(\frac{PG}{QL}\right)\left(\frac{PH}{QK}\right)$$

又因為$\frac{PG}{QL}=\frac{PC}{QE}$，$\frac{PH}{QK}=\frac{PF}{QD}$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{y^2}=\frac{PC\cdot PF}{QE\cdot QD}=\frac{AP\cdot PB}{BQ\cdot QA}=\frac{(a+x)(a-x)}{(a-y)(a+y)}\Rightarrow x=y\text{。}$$



[證明三]

如右圖，建立坐標系：

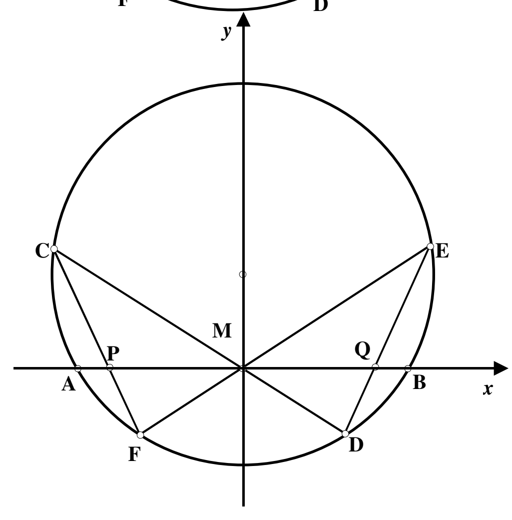
圓的方程式為 $x^2+(y-m)^2=R^2$

直線 CD 的方程式為 $y=k_1x$

直線 EF 的方程式為 $y=k_2x$

由圓與兩相交直線組成的二次曲線系為

$\mu(x^2+(y-m)^2-R^2)+\lambda(y-k_1x)(y-k_2x)=0$



令 y=0 可得 P、Q 兩點的橫坐標滿足二次方程式

$(\mu+\lambda k_1k_2)x^2+\mu(m^2-R^2)=0$

由於一次項係數爲零

所以兩根 x_1 與 x_2 之和爲零，即 $x_1+x_2=0$

所以 PM=QM。