

桃園縣 99 年國民中學新進教師甄選【專門科目：數學】試題卷

※注意事項：1. 答案一律畫在答案卡上，如寫在試題卷上不予計分。

2. 作答完畢，請將試題及答案卡一併交回。

3. 本試題共二頁。

一、單一選擇題：請依照題意，從四個選項中選出一個正確或最佳的答案(共25題，每題4分，合計100分)

1. 若 $G(1)=1$ 且對所有 $n \geq 2$ 的整數 $G(n)=G(n-1)+\frac{1}{3}$ ，

則 $G(100)=$

- (A) 33
- (B) 34
- (C) 35
- (D) 36

2. 某位數學家於他早期導出此公式：對所有實數 x 滿足

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \text{。他是}$$

- (A) 歐幾里得
- (B) 歐拉
- (C) 牛頓
- (D) 高斯

3. 將自然數依序寫出如下的算式，例如，

$$\text{第 1 個算式： } 1+2 = 3$$

$$\text{第 2 個算式： } 4+5+6=7+8$$

$$\text{第 3 個算式： } 9+10+11+12 = 13+14+15$$

按照此規律繼續寫下去的第 100 個算式之等號右側的數字總和是多少？

- (A) 1014949
- (B) 1015050
- (C) 1015151
- (D) 1015152

4. 設 $S=1^2+2^2+3^2+\cdots+2008^2+2009^2+2010^2$ ，則 S 的個位數字為

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 5
- (D) 6

5. 假設 A 是 3×3 方陣使得 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 且 $A \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，

$$\text{則 } A \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = ?$$

- (A) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (B) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (C) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (D) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$6. \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx =$$

- (A) $1 - \pi/4$
- (B) $\pi/4$
- (C) $\tan^{-1}\left(\sqrt{2}/2\right)$
- (D) $\ln 2$

7. 設 $f(n) = x^n + \frac{1}{x^n}$ (n 為正整數) 且 $f(1)=1$ ，

求 $f(100)$ 之值為

- (A) -2
- (B) -1
- (C) 1
- (D) 2

8. 過點 $(1, 8)$ 與曲線 $y = x^3 - x^2 - 8x + 8$ 相切之切線方程式為 $y = ax + b$ ，求 $a + b$ 之值為

- (A) 8
- (B) 10
- (C) 12
- (D) 16

9. 若 $\cos \theta - \sin \theta = 1$ ，則 $\cos^4 \theta + \sin^4 \theta$ 之值為

- (A) $\frac{1}{2}$
- (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (D) 1

10. 隨機自 1 到 100 的正整數中任選一數 a (包括 1 及 100)，設選到 $a \leq 50$ 的機率為 p 而選到 $a > 50$ 的機率為 $2p$ ，求選到的 a 為平方數的機率最接近下列何數

- (A) 0.06
- (B) 0.07
- (C) 0.08
- (D) 0.09

11. 若向量 $|\vec{a}| = |\vec{b}| + 1 = |\vec{a} + 2\vec{b}| = 2$ ，則向量 \vec{a} 與 \vec{b} 之夾角為

- (A) $\frac{\pi}{6}$
- (B) $\frac{\pi}{4}$
- (C) $\frac{2\pi}{3}$
- (D) $\frac{3\pi}{4}$

12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{\theta}{2^n}$ 之值為

- (A) 0
- (B) $\cot \theta$
- (C) $-2 \cot 2\theta$
- (D) $\tan \theta$

13. 設 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，若 $f(1) = f(4) = 0$ ， $f(2) = -16$ ， $f(3) = -20$ ，則 b 之值為

- (A) -6
- (B) 10
- (C) 12
- (D) 16

14. 令 $a = \log_{10} 2$ 、 $b = \log_2 3$ 、 $c = \log_3 7$ 。請問 $10^{1-a+abc}$ (即：10 的 $(1-a+abc)$ 次方) 是多少？
- Ⓐ 14
Ⓑ 21
Ⓒ 35
Ⓓ 42

15. 設 a 為常數。若線性方程組
$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 2x-y-z=4 \\ 5x-y+az=8 \end{cases}$$
 無解，

則 $a = ?$

- Ⓐ 0
Ⓑ $\frac{3}{5}$
Ⓒ $-\frac{2}{5}$
Ⓓ $\frac{17}{5}$
16. 有一個凸六邊形 $ABCDEF$ ，它的每一個內角都是 120° 。已知 $\overline{AB} = 3$ 、 $\overline{BC} = 5$ 、 $\overline{CD} = 6$ 、及 $\overline{DE} = 4$ 。請問這個六邊形的面積為何？

- Ⓐ $40\sqrt{3}$
Ⓑ $\frac{135\sqrt{3}}{4}$
Ⓒ $\frac{125\sqrt{6}}{4}$
Ⓓ $40\sqrt{6}$
17. 一個三角形的三條中線長分別為 4, 5, 6。請問這個三角形的面積為何？

- Ⓐ $5\sqrt{7}$
Ⓑ $\frac{15\sqrt{3}}{4}$
Ⓒ 15
Ⓓ $\frac{10\sqrt{2}}{3}$
18. 空間中兩球面 $C_1: x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 25$ 、
 $C_2: (x+1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 16$ 所相交形成的圓的面積為何？

- Ⓐ 15π
Ⓑ $\frac{175\pi}{11}$
Ⓒ $\frac{185\pi}{11}$
Ⓓ $\frac{195\pi}{11}$
19. 將五個真分數： $\frac{11}{17}$ 、 $\frac{13}{20}$ 、 $\frac{24}{37}$ 、 $\frac{37}{57}$ 、 $\frac{61}{94}$ 由小到大排成一列，排第三的是哪一個？

- Ⓐ $\frac{13}{20}$
Ⓑ $\frac{24}{37}$
Ⓒ $\frac{37}{57}$
Ⓓ $\frac{61}{94}$

20. 平面上有一線段 $\overline{AB} = 5$ 。已知平面上滿足 $\overline{AP} = 3 \cdot \overline{BP}$ 的動點 P 所形成的軌跡為一個圓。請問此圓的半徑為何？

- Ⓐ 5
Ⓑ $\frac{5}{4}$
Ⓒ $\frac{5}{2}$
Ⓓ $\frac{15}{8}$

21. 小明在布置教室時，需要將五條不同顏色的綵帶掛在教室後方五片不同形狀的木板上。請問每片木板上最多掛兩條綵帶的方法有幾種？

- Ⓐ 720
Ⓑ 1440
Ⓒ 2220
Ⓓ 3600

22. 設 k 為實數。若 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2} dx = 1$ ，請問 k 值為何？

- Ⓐ π
Ⓑ 2π
Ⓒ $\frac{1}{\pi}$
Ⓓ $\frac{1}{2\pi}$

23. 坐標空間中有兩歪斜線 $L: \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-1}$ 、

$M: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-4}{-1}$ 。請問這兩條歪斜線的距離為何？

- Ⓐ $\frac{\sqrt{38}}{19}$
Ⓑ $\frac{\sqrt{46}}{23}$
Ⓒ $\frac{\sqrt{58}}{29}$
Ⓓ $\frac{\sqrt{62}}{31}$

24. 設 $\{a_n\}$ 為一數列， $\sum_{i=1}^n a_i = 2n^2 + 2n + 3$ ，

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}} - \sqrt{a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n+1}})$ 之值為

- Ⓐ $-\sqrt{2}$
Ⓑ $-2\sqrt{2}$
Ⓒ -2
Ⓓ -4

25. 設 $f(x) = x^3 + 2$ ，則 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{2h}$ 之值為

- Ⓐ 0
Ⓑ 1
Ⓒ 3
Ⓓ 12