

96 學年度中區五縣市政府教師甄選策略聯盟

國中數學科試題

一、單一選擇題（共 50 題，每題 2 分，共 100 分）

- 以下何者不是下列矩陣 $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ 的特徵值？
① 2 ② $2+\sqrt{2}$ ③ $2-\sqrt{2}$ ④ -2。
- 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 11 & 1 \\ 5 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ ，則 A 的秩(rank)是多少？
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4。
- 下列級數何者收斂
① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n)}$ ③ $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$ ④ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 。
- 假設 X 與 Y 為兩個隨機變數，它們的聯合密度函數為 $f_{X,Y}(x,y) = 2, 0 < x < y < 1$ ，下列敘述何者錯誤
① X 的密度函數為 $f_X(x) = 2(1-x), 0 < x < 1$ ② Y 的密度函數為 $f_Y(y) = 2y, 0 < y < 1$ ③ X 與 Y 為獨立隨機變數 ④ X 與 Y 非為獨立隨機變數。
- 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} =$
① 1 ② 0 ③ -1 ④ 2。
- 請計算下列積分值 $\int_0^{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} 2(y \sin x + x \cos y) dx dy$
① π ② π^2 ③ $-\pi^2$ ④ $-2\pi^2$ 。
- 假設 X 是一個標準常態分布的隨機變數，則 X^2 的分布為何？
① 亦為標準常態分布 ② 指數分布 ③ 二項分布 ④ 卡方分布。
- 設 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ ，求 $\det(AA^T) =$
① 9 ② -1 ③ -10 ④ 10。
- 假設 $i = \sqrt{-1}$ ，則 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ 稱為
① 歐拉方程式 ② 拉普拉斯方程式 ③ 高斯方程式 ④ 傅立葉方程式。
- 請找出函數 $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7$ 的反曲點
① -1 ② -2 ③ 4/18 ④ -4/18。
- 關於下列聯立方程式的解，何者正確？
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 7 \\ -3x_1 - 4x_3 &= 11 \\ -x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= 12 \end{aligned}$$

① $x_1 = 0.2$ ② $x_2 = -0.3$ ③ 此聯立方程式無解 ④ 此聯立方程式有無窮多解。
- 下列何者為遞增函數？
① $(1+\frac{1}{x})^x, x > 0$ ② $(1-\frac{1}{x})^{-x}, x > 1$ ③ $e^{-x}, x \in \mathbb{R}$ ④ $\sin x, x \in \mathbb{R}$ 。
- 假設某個都市有 0.5% 的人患有愛滋病；某種生理檢驗方法的臨床應用上，對於患有愛滋病的人而言，被誤檢驗為呈現陰性的機率為 2%；而對於沒有患愛滋病的人而言，被誤檢為陽性的機率為 3%。則已知某人檢驗為陽性的情況下，他真的患有愛滋病疾病的機率大約為何？
① 0.25 ② 0.58 ③ 0.14 ④ 0.95。
- 生產某塑膠產品 x 件的總成本為 $S = \frac{1}{5}x^2 + 2x + 100$ ，而每件產品的售價為 $P = 50 - x$ ，則每件產品價格為多少的時候，會有最大利潤？
① 20 ② 30 ③ 40 ④ 45。
- 同 14 題，x 為多少的時候，每件產品的製作成本最低？
① $\sqrt{500}$ ② 50 ③ 40 ④ 30。
- 下列級數和的值何者與 π 相等
① $\sum_1^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ② $\sum_1^{\infty} \frac{1}{k}$ ③ $4 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ ④ $\sum_2^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 - 2k + 1}$ 。

17. 設 $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ ，求 $\Gamma(\frac{1}{2})$
 ① $\sqrt{\pi}$ ② $\sqrt{2\pi}$ ③ π ④ 2π 。
18. 設 X 為一個隨機變數，它的機率密度函數為 $f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, x > 0$ ； $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ 。求 X 的期望值 $E(X) =$
 ① $\alpha \lambda$ ② λ / α ③ α / λ ④ α / λ^2 。
19. 一個凸多面體共有 7 個面及 10 個頂點，它應該有幾條稜線？
 ① 10 條 ② 12 條 ③ 15 條 ④ 16 條。
20. 假設將某一種藥物經由皮下注射之後 t 時間，量得血液中該藥的濃度為 $f(t) = \frac{\lambda}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt}), t \geq 0$ 。則當時間 t 為多少的時候，該藥的濃度最高？
 ① $t = \ln(\frac{b}{a})$ ② $t = \frac{\lambda}{b-a} \ln(\frac{b}{a})$ ③ $t=0$ ④ $t = \frac{1}{b-a} \ln(\frac{b}{a})$ 。
21. 求無窮級數函數 $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{k+1}{k})^{k^2} x^k$ 的收斂半徑
 ① 0 ② 1 ③ e^{-1} ④ ∞ 。
22. 小明想知道某一個銅板出現正面的機率，於是他丟銅板 200 次，發現出現正面的次數是 96 次，於是他作出一個結論：銅板出現正面的機率大約是 $\frac{96}{200} = 0.48$ ，請問他是根據什麼原理
 ① 中央極限定理 ② 大數法則 ③ 高斯定律 ④ 拉普拉斯定理。
23. 某位立法委員想知道他的民意支持度，如果你是他的競選團隊，希望將誤差控制在 0.05 以下，而且具有 90% 的可信度，則使用常態分布近似的方法，樣本數至少需要多少？
 ① 107 ② 451 ③ 271 ④ 563。
24. 假設燈泡壽命 X 的機率密度函數為 $f(x) = xe^{-x}, x > 0$ 。在時間 1.5 單位時燈泡還沒壞掉的情況下，燈泡壽命可以超過 2 時間單位的機率大約是多少？設指數常數 $e^1 = 2.718$ 。
 ① 0.63 ② 0.44 ③ 0.85 ④ 0.73。
25. 設 $C_j^n = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ ，求 $\sum_{j=0}^{10} C_j^{10} =$
 ① 256 ② 729 ③ 1024 ④ 500。
26. 令 $f(x) = \int_0^{x^2} \int_0^{v^2} e^{-u} du dv$ 。則 $f(x)$ 在 $x=1$ 處的斜率為
 ① $2(1-e^{-1})$ ② $2-e^{-1}$ ③ $1-e^{-1}$ ④ 不存在。
27. $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{2x} + 2x)^{1/x} =$
 ① 1 ② e^2 ③ e ④ ∞ 。
28. 求 $f(x, y) = xe^y + \cos xy$ 在單位向量 $u = \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}j$ 方向上於點 $P(2, 0)$ 的方向導數(directional derivative)為
 ① $1 - \sqrt{3}$ ② $1 + \sqrt{3}$ ③ $\frac{1}{2} - \sqrt{3}$ ④ $\frac{1}{2} + \sqrt{3}$ 。
29. $\int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx =$
 ① $\frac{1}{2}(e^{\pi/2} - 1)$ ② $\frac{1}{2}(1 - e^{\pi/2})$ ③ $e^{\pi/2} - 1$ ④ $1 - e^{\pi/2}$ 。
30. 設 $\{a_n\}$ 為一收斂數列且具有性質 $a_n = \frac{1}{3}(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}})$ ， $n \geq 1$ 。已知 $a_0 = 3$ ，求此數列的極限值為
 ① -1 ② 1 ③ ± 1 ④ 0。
31. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，則 $\det A^n = ?$ (n 為正整數)
 ① -1 ② 0 ③ 1 ④ n 。
32. 設 A, B 均為矩陣，下列敘述何者正確？
 ① $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ② 若 $AB = O$ ，則 $A = O$ 或 $B = O$ ③ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ④ 前 3 個選項均不正確。
33. 設 A 為 n 階方陣且其秩(rank)為 n ，已知 $A^2 = A$ ，則下列敘述何者正確？
 ① 滿足此種性質的方陣 A 只有一個，即 $A = I$ (單位矩陣) ② 滿足此種性質的方陣 A 有二個以上 ③ A^{-1} 有時存在，有時不存在 ④ $A^n = nA$ 。
34. 設 A, B 均為矩陣，下列敘述何者正確？
 ① 若 A^{-1} 和 B^{-1} 均存在，則 $(A+B)^{-1}$ 一定存在 ② 若 A^{-1} 和 B^{-1} 均不存在，則 $(A+B)^{-1}$ 一定不存在 ③ 若 A^{-1} ， B^{-1} 和 $(A+B)^{-1}$ 均存在，則 $(B^{-1} + A^{-1})^{-1} = B(A+B)^{-1}A$ ④ 前 3 個選項均正確。

35. $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ ，設 A 所有的特徵值(eigenvalue)的和為 a ，所有的特徵值的乘積為 b ，則
 ① $a+b=1$ ② $a-b=-1$ ③ $a+b=2$ ④ $a-b=-2$ 。
36. 擲一個公正的六面骰子，則至少需連續擲幾次，出現 5 點的機率會大於 $\frac{2}{3}$ ($\log 2 = 0.3010, \log 3 = 0.4771$)
 ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8。
37. 設隨機變數 X 為二項分配，令 p 為實驗成功的機率， n 為實驗的總次數，則 $E(X^2) = ?$
 ① $np(1-p)$ ② $np(1+np-p)$ ③ $np(1+np)$ ④ $1+np+p^2$ 。
38. 設 a, b, c 均為正整數且每數為偶數的機率為 p ，若 $ab+c$ 為奇數的機率大於 $\frac{1}{2}$ ，求 p 的範圍
 ① $\frac{1}{2} < p < 1$ ② $\frac{1}{2} < p < \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{2-\sqrt{2}}{2} < p < \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{2-\sqrt{2}}{2} < p < \frac{1}{2}$ 。
39. 設 n 筆資料的樣本變異數為 a ，若將每個資料減去 5 後，所得到新的樣本變異數為 b ，則
 ① $a=b$ ② $a=b-5$ ③ $a=b-25$ ④ $a=b-\sqrt{5}$ 。
40. 若將所收集到的 n 筆資料 $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$ ，以最小平方方法得到的迴歸線為 $y = a + bx$ 。今將收集的資料 x_i, y_i 均變為原來的 3 倍，則新迴歸線 x 的係數為
 ① b ② $3b$ ③ $9b$ ④ b^3 。
41. 隨機變數 X 的機率密度函數為 $f(x) = 1/2, -1 < x < 1$ ，求其 90 分位數
 ① 0.8 ② 0.85 ③ 0.9 ④ 0.95。
42. $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ，求 $f'(0) = ?$
 ① -1 ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 不存在。
43. $\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = ?$
 ① $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ③ $2\sqrt{\pi}$ ④ $2\sqrt{2\pi}$ 。
44. 曲線 $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ 在點 $P(2,4)$ 的切線方程式為 $y = ax + b$ ，則 $4a + 2b = ?$
 ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8。
45. 設 $f(x)$ 為實係數三次多項式且滿足 $f(1-i) = 0 (i = \sqrt{-1})$ ，則函數 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸有幾個交點?
 ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3。
46. 若三直線 $x+y+1=0, x-y+3=0, kx+y+5=0$ 不能圍成一個三角形，則 k 的所有可能值之和為
 ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3。
47. 設 $x, y \in R, x^2 + 4y^2 = 1$ 。令 $|x| + y^2$ 的最大值為 a ，最小值為 b ，則 $a+b =$
 ① 1 ② $5\frac{3}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{4}$ 。
48. 已知 $0 < \cos \theta + \sin \theta < 1$ 且 $\sin \theta \times \sqrt{\csc^2 \theta - 1} > 0$ ，求 θ 在第幾象限
 ① 第一象限 ② 第二象限 ③ 第三象限 ④ 第四象限。
49. 令 a, b, c 為 $x^3 - 2x^2 + 4x + 10 = 0$ 的三個根，試求 $(a+1)(b+1)(c+1)$ 的值。
 ① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3。
50. 設 $f(x) = x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 1$ ，則 $(f^{-1})'(2) =$
 ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{13}$ ④ $\frac{1}{14}$ 。