

## 國中數學科試題

## 一、單一選擇題（共 50 題，每題 2 分，共 100 分）

1. 以下何者不是下列矩陣  $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$  的特徵值？  
 ① 2    ②  $2+\sqrt{2}$     ③  $2-\sqrt{2}$     ④ -2。
2. 設矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 11 & 1 \\ 5 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ ，則 A 的秩(rank)是多少？  
 ① 1    ② 2    ③ 3    ④ 4。
3. 下列級數何者收斂  
 ①  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$     ②  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n)}$     ③  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$     ④  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 。
4. 假設 X 與 Y 為兩個隨機變數，它們的聯合密度函數為  $f_{X,Y}(x,y) = 2, 0 < x < y < 1$ ，下列敘述何者錯誤  
 ① X 的密度函數為  $f_X(x) = 2(1-x), 0 < x < 1$     ② Y 的密度函數為  $f_Y(y) = 2y, 0 < y < 1$     ③ X 與 Y 為獨立隨機變數    ④ X 與 Y 非為獨立隨機變數。
5. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} =$   
 ① 1    ② 0    ③ -1    ④ 2。
6. 請計算下列積分值  $\int_0^{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} 2(y \sin x + x \cos y) dx dy$   
 ①  $\pi$     ②  $\pi^2$     ③  $-\pi^2$     ④  $-2\pi^2$ 。
7. 假設 X 是一個標準常態分布的隨機變數，則  $X^2$  的分布為何？  
 ① 亦為標準常態分布    ② 指數分布    ③ 二項分布    ④ 卡方分布。
8. 設  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ ，求  $\det(AA^T) =$   
 ① 9    ② -1    ③ -10    ④ 10。
9. 假設  $i = \sqrt{-1}$ ，則  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  稱為  
 ① 歐拉方程式    ② 拉普拉斯方程式    ③ 高斯方程式    ④ 傅立葉方程式。
10. 請找出函數  $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7$  的反曲點  
 ① -1    ② -2    ③ 4/18    ④ -4/18。
11. 關於下列聯立方程式的解，何者正確？  

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 7 \\ -3x_1 - 4x_3 = 11 \\ -x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 12 \end{cases}$$
  
 ①  $x_1 = 0.2$     ②  $x_2 = -0.3$     ③ 此聯立方程式無解    ④ 此聯立方程式有無窮多解。
12. 下列何者為遞增函數？  
 ①  $(1 + \frac{1}{x})^x, x > 0$     ②  $(1 - \frac{1}{x})^x, x > 1$     ③  $e^{-x}, x \in \mathbb{R}$     ④  $\sin x, x \in \mathbb{R}$ 。
13. 假設某個都市有 0.5% 的人患有愛滋病；某種生理檢驗方法的臨床應用上，對於患有愛滋病的人而言，被誤檢驗為呈現陰性的機率為 2%；而對於沒有患愛滋病的人而言，被誤檢為陽性的機率為 3%。則已知某人檢驗為陽性的情況下，他真的患有愛滋病疾病的機率大約為何？  
 ① 0.25    ② 0.58    ③ 0.14    ④ 0.95。
14. 生產某塑膠產品 x 件的總成本為  $S = \frac{1}{5}x^2 + 2x + 100$ ，而每件產品的售價為  $P = 50 - x$ ，則每件產品價格為多少的時候，會有最大利潤？  
 ① 20    ② 30    ③ 40    ④ 45。
15. 同 14 題，x 為多少的時候，每件產品的製作成本最低？  
 ①  $\sqrt{500}$     ② 50    ③ 40    ④ 30。
16. 下列級數和的值何者與  $\pi$  相等  
 ①  $\sum_1^{\infty} \frac{1}{k^2}$     ②  $\sum_1^{\infty} \frac{1}{k}$     ③  $4 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$     ④  $\sum_2^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 - 2k + 1}$ 。

17. 設  $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ ，求  $\Gamma(\frac{1}{2})$   
 ①  $\sqrt{\pi}$  ②  $\sqrt{2\pi}$  ③  $\pi$  ④  $2\pi$ 。
18. 設  $X$  為一個隨機變數，它的機率密度函數為  $f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, x > 0$ ； $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ 。求  $X$  的期望值  $E(X) =$   
 ①  $\alpha \lambda$  ②  $\lambda / \alpha$  ③  $\alpha / \lambda$  ④  $\alpha / \lambda^2$ 。
19. 一個凸多面體共有 7 個面及 10 個頂點，它應該有幾條稜線？  
 ① 10 條 ② 12 條 ③ 15 條 ④ 16 條。
20. 假設將某一種藥物經由皮下注射之後  $t$  時間，量得血液中該藥的濃度為  $f(t) = \frac{\lambda}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt}), t \geq 0$ 。則當時間  $t$  為多少的時候，該藥的濃度最高？  
 ①  $t = \ln(\frac{b}{a})$  ②  $t = \frac{\lambda}{b-a} \ln(\frac{b}{a})$  ③  $t=0$  ④  $t = \frac{1}{b-a} \ln(\frac{b}{a})$ 。
21. 求無窮級數函數  $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{k+1}{k})^{k^2} x^k$  的收斂半徑  
 ① 0 ② 1 ③  $e^{-1}$  ④  $\infty$ 。
22. 小明想知道某一個銅板出現正面的機率，於是他丟銅板 200 次，發現出現正面的次數是 96 次，於是他作出一個結論：銅板出現正面的機率大約是  $\frac{96}{200} = 0.48$ ，請問他是根據什麼原理  
 ① 中央極限定理 ② 大數法則 ③ 高斯定律 ④ 拉普拉斯定理。
23. 某位立法委員想知道他的民意支持度，如果你是他的競選團隊，希望將誤差控制在 0.05 以下，而且具有 90% 的可信度，則使用常態分布近似的方法，樣本數至少需要多少？  
 ① 107 ② 451 ③ 271 ④ 563。
24. 假設燈泡壽命  $X$  的機率密度函數為  $f(x) = xe^{-x}, x > 0$ 。在時間 1.5 單位時燈泡還沒壞掉的情況下，燈泡壽命可以超過 2 時間單位的機率大約是多少？設指數常數  $e^1 = 2.718$ 。  
 ① 0.63 ② 0.44 ③ 0.85 ④ 0.73。
25. 設  $C_j^n = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ ，求  $\sum_{j=0}^{10} C_j^{10} =$   
 ① 256 ② 729 ③ 1024 ④ 500。
26. 令  $f(x) = \int_0^{x^2} \int_0^{v^2} e^{-u} du dv$ 。則  $f(x)$  在  $x=1$  處的斜率為  
 ①  $2(1-e^{-1})$  ②  $2-e^{-1}$  ③  $1-e^{-1}$  ④ 不存在。
27.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{2x} + 2x)^{1/x} =$   
 ① 1 ②  $e^2$  ③  $e$  ④  $\infty$ 。
28. 求  $f(x, y) = xe^y + \cos xy$  在單位向量  $u = \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}j$  方向上於點  $P(2, 0)$  的方向導數(directional derivative)為  
 ①  $1 - \sqrt{3}$  ②  $1 + \sqrt{3}$  ③  $\frac{1}{2} - \sqrt{3}$  ④  $\frac{1}{2} + \sqrt{3}$ 。
29.  $\int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx =$   
 ①  $\frac{1}{2}(e^{\pi/2} - 1)$  ②  $\frac{1}{2}(1 - e^{\pi/2})$  ③  $e^{\pi/2} - 1$  ④  $1 - e^{\pi/2}$ 。
30. 設  $\{a_n\}$  為一收斂數列且具有性質  $a_n = \frac{1}{3}(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}})$ ， $n \geq 1$ 。已知  $a_0 = 3$ ，求此數列的極限值為  
 ① -1 ② 1 ③  $\pm 1$  ④ 0。
31. 設矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，則  $\det A^n = ?$  ( $n$  為正整數)  
 ① -1 ② 0 ③ 1 ④  $n$ 。
32. 設  $A, B$  均為矩陣，下列敘述何者正確？  
 ①  $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$  ② 若  $AB = O$ ，則  $A = O$  或  $B = O$  ③  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  ④ 前 3 個選項均不正確。
33. 設  $A$  為  $n$  階方陣且其秩(rank)為  $n$ ，已知  $A^2 = A$ ，則下列敘述何者正確？  
 ① 滿足此種性質的方陣  $A$  只有一個，即  $A = I$  (單位矩陣) ② 滿足此種性質的方陣  $A$  有二個以上 ③  $A^{-1}$  有時存在，有時不存在 ④  $A^n = nA$ 。
34. 設  $A, B$  均為矩陣，下列敘述何者正確？  
 ① 若  $A^{-1}$  和  $B^{-1}$  均存在，則  $(A+B)^{-1}$  一定存在 ② 若  $A^{-1}$  和  $B^{-1}$  均不存在，則  $(A+B)^{-1}$  一定不存在 ③ 若  $A^{-1}$ ， $B^{-1}$  和  $(A+B)^{-1}$  均存在，則  $(B^{-1} + A^{-1})^{-1} = B(A+B)^{-1}A$  ④ 前 3 個選項均正確。

35.  $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ ，設  $A$  所有的特徵值(eigenvalue)的和為  $a$ ，所有的特徵值的乘積為  $b$ ，則  
 ①  $a+b=1$  ②  $a-b=-1$  ③  $a+b=2$  ④  $a-b=-2$ 。
36. 擲一個公正的六面骰子，則至少需連續擲幾次，出現 5 點的機率會大於  $\frac{2}{3}$  ( $\log 2 = 0.3010, \log 3 = 0.4771$ )  
 ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8。
37. 設隨機變數  $X$  為二項分配，令  $p$  為實驗成功的機率， $n$  為實驗的總次數，則  $E(X^2) = ?$   
 ①  $np(1-p)$  ②  $np(1+np-p)$  ③  $np(1+np)$  ④  $1+np+p^2$ 。
38. 設  $a, b, c$  均為正整數且每數為偶數的機率為  $p$ ，若  $ab+c$  為奇數的機率大於  $\frac{1}{2}$ ，求  $p$  的範圍  
 ①  $\frac{1}{2} < p < 1$  ②  $\frac{1}{2} < p < \frac{1+\sqrt{2}}{2}$  ③  $\frac{2-\sqrt{2}}{2} < p < \frac{1+\sqrt{2}}{2}$  ④  $\frac{2-\sqrt{2}}{2} < p < \frac{1}{2}$ 。
39. 設  $n$  筆資料的樣本變異數為  $a$ ，若將每個資料減去 5 後，所得到新的樣本變異數為  $b$ ，則  
 ①  $a=b$  ②  $a=b-5$  ③  $a=b-25$  ④  $a=b-\sqrt{5}$ 。
40. 若將所收集到的  $n$  筆資料  $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$ ，以最小平方方法得到的迴歸線為  $y = a + bx$ 。今將收集的資料  $x_i, y_i$  均變為原來的 3 倍，則新迴歸線  $x$  的係數為  
 ①  $b$  ②  $3b$  ③  $9b$  ④  $b^3$ 。
41. 隨機變數  $X$  的機率密度函數為  $f(x) = 1/2, -1 < x < 1$ ，求其 90 分位數  
 ① 0.8 ② 0.85 ③ 0.9 ④ 0.95。
42.  $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & x \neq 0 \\ x, & x = 0 \end{cases}$ ，求  $f'(0) = ?$   
 ① -1 ② 0 ③  $\frac{1}{2}$  ④ 不存在。
43.  $\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = ?$   
 ①  $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$  ②  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$  ③  $2\sqrt{\pi}$  ④  $2\sqrt{2\pi}$ 。
44. 曲線  $x^3 + y^3 - 9xy = 0$  在點  $P(2,4)$  的切線方程式為  $y = ax + b$ ，則  $4a + 2b = ?$   
 ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8。
45. 設  $f(x)$  為實係數三次多項式且滿足  $f(1-i) = 0 (i = \sqrt{-1})$ ，則函數  $y = f(x)$  的圖形與  $x$  軸有幾個交點?  
 ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3。
46. 若三直線  $x+y+1=0, x-y+3=0, kx+y+5=0$  不能圍成一個三角形，則  $k$  的所有可能值之和為  
 ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3。
47. 設  $x, y \in R, x^2 + 4y^2 = 1$ 。令  $|x| + y^2$  的最大值為  $a$ ，最小值為  $b$ ，則  $a+b =$   
 ① 1 ②  $5\frac{3}{4}$  ③ 2 ④  $\frac{5}{4}$ 。
48. 已知  $0 < \cos \theta + \sin \theta < 1$  且  $\sin \theta \times \sqrt{\csc^2 \theta - 1} > 0$ ，求  $\theta$  在第幾象限  
 ① 第一象限 ② 第二象限 ③ 第三象限 ④ 第四象限。
49. 令  $a, b, c$  為  $x^3 - 2x^2 + 4x + 10 = 0$  的三個根，試求  $(a+1)(b+1)(c+1)$  的值。  
 ① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3。
50. 設  $f(x) = x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 1$ ，則  $(f^{-1})'(2) =$   
 ①  $\frac{1}{3}$  ②  $\frac{1}{4}$  ③  $\frac{1}{13}$  ④  $\frac{1}{14}$ 。