

99 學年度中區六縣市政府教師甄選策略聯盟 國民中學數學科試題

單一選擇題（共 50 題，每題 2 分，共 100 分）

- () 1. 偶數集合與自然數集合可以建立如下一一對應關係： $n \leftrightarrow 2n$ ，因此，
① 偶數與自然數的個數一樣多 ② 偶數個數少於自然數個數
③ 偶數個數與自然數個數不能比較 ④ 自然數個數比偶數個數大一倍
- () 2. 代數基本定理與下列哪一選項有關？
① 與代數運算法則有關 ② 與代數方程式的判別式有關
③ 與算術基本定理有關 ④ 與代數方程式的根之存在有關
- () 3. 二次方程式的判別式與下列哪一選項最有關係？
① 與兩根是否相等有關 ② 與根的正負有關 ③ 與二次項係數的正負有關 ④ 以上皆非
- () 4. 有關餘弦定律與畢氏定理之關係，試問下列何者正確？
① 兩者無關，因為一個是三角學定律，另一個是幾何學定理 ② 前者是後者的延拓
③ 前者是後者的特例 ④ 前者討論一般三角形，後者針對直角三角形，因此，無法比較
- () 5. 如何定義 $2^{\sqrt{2}}$ ？下列哪一個選項不相干？
① 考慮函數 $y = 2^x$ ，代入 $x = \sqrt{2}$ 即可 ② 依據實數完備性
③ 要先知道 2^2 如何定義 ④ 考慮有理數列 r_n 收斂到 $\sqrt{2}$
- () 6. 給定方程式 $5x-7y=3$ ，試求其整數解，則下列選項不適用？
① 可以運用尤（歐）拉法 ② 可以運用輾轉相除法 ③ 此一方程有整數解 ④ 此一方程無整數解
- () 7. 下列哪一個選項中的分數等於循環小數 $0.\overline{08}$ ？
① $\frac{8}{99}$ ② $\frac{8}{100}$ ③ $\frac{8}{101}$ ④ $\frac{8}{102}$
- () 8. 平面上二向量 α 、 β ，已知 $\alpha + \beta$ 和 β 的長度相等，請選出正確的選項：
① $(\alpha + \beta) \cdot \alpha - \beta \cdot \alpha = 0$ ② $(\alpha + \beta) \cdot \alpha + \beta \cdot \alpha = 0$ ③ $(\alpha + \beta) \cdot \alpha = 0$ ④ $\alpha \cdot \beta = 0$
- () 9. 在一個骰子的六個面上隨意刻上1到6點，總共有幾種刻法？
① 2種 ② 15種 ③ 30種 ④ 120種
- () 10. 若 P 、 Q 、 A 代表命題（或敘述）， $\neg P$ 代表 P 的逆命題等等。運用真值表，找出下列選項中無效的推論形式：
① $A \Rightarrow A$ ② $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P$ ③ 若 $\sqrt{2}$ 為有理數，則3為偶數 ④ 若 $\sqrt{2}$ 為無理數，則3為偶數
- () 11. 一銳角三角形 $\triangle ABC$ 中 P 為其重心，令 x, y, z 表示 P 至三邊 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 之垂直線段長，則 $x : y : z = ?$
① $\sin A : \sin B : \sin C$ ② $\cos A : \cos B : \cos C$ ③ $\tan A : \tan B : \tan C$ ④ $\csc A : \csc B : \csc C$
- () 12. 一袋中有七個號碼球分別是編號1~7，若取出其中相異四個球(不放回)，則其數字編號加總之和為偶數的機率是？
① $\frac{16}{35}$ ② $\frac{18}{35}$ ③ $\frac{19}{35}$ ④ $\frac{21}{35}$
- () 13. 設 $a \in R$ ，若 $\frac{3-i}{1-i} + \frac{a+i}{1+i}$ 亦為實數，則 $a = ?$
① 3 ② 2 ③ 1 ④ $\frac{2}{3}$
- () 14. 在平面上，給定一個單位長，則下列哪一長度無法以尺規作圖作出？
① $\sqrt{2}$ ② $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ③ $\sqrt[3]{2}$ ④ $\sqrt[4]{2}$

99 學年度中區六縣市政府教師甄選策略聯盟 國民中學數學科試題

- ()15.若 (x, y) 為給定橢圓 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ 上的點，則 $x^2 + y^2$ 的最小值為？
 ①5 ②9 ③16 ④25
- ()16.將一個籃球剪開有限多刀之後，無法完全攤成平面，下列哪一選項不是其原因之一？
 ① 平面的高斯曲率為 0 ② 球面之高斯曲率不為 0
 ③ 球極射影(stereographic projection)可以將球面映成平面 ④ 球面與平面之間不存在等距變換
- ()17.三角形的三個頂點均在單位圓的圓周上，則其面積的最大值為？
 ① $\frac{1}{4}\sqrt{27}$ ② $\frac{1}{2}\sqrt{27}$ ③ $\frac{1}{3}\sqrt{27}$ ④ $\sqrt{27}$
- ()18.坐標平面上 $x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$ 的軌跡圖形是？
 ① 拋物線 ② 圓 ③ 橢圓 ④ 雙曲線
- ()19.單位圓的外切直角三角形面積的最小值是？
 ① $3 + 2\sqrt{2}$ ② 5 ③ $6 - \sqrt{2}$ ④ $6 + \sqrt{2}$
- ()20.空間中一平行六面體之一頂點座標 $(-1, 2, 2)$ 其相鄰之三頂點座標分別為 $(0, 1, 1)$, $(-3, -2, 4)$, $(-4, 6, 8)$ ，則其體積為？
 ①16 ②18 ③20 ④22
- ()21.正圓錐高度為 1cm ，半徑為 3cm 。若有一正圓柱內接於此正圓錐，則其最大體積為？
 ① $\frac{3\pi}{4}\text{cm}^3$ ② $\frac{4\pi}{3}\text{cm}^3$ ③ $\frac{3\pi}{2}\text{cm}^3$ ④ $\frac{5\pi}{4}\text{cm}^3$
- ()22.由曲面 $(x - y)^2 - z^2 = 1$ 至原點之最短距離為？
 ① $\sqrt{2}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ④ 1
- ()23.在平面上，兩直線 l_1 、 l_2 被第三條直線所截，且同側內角和小於 180 度，則
 ① 同位角相等 ② 內錯角相等 ③ l_1 、 l_2 相交 ④ l_1 、 l_2 平行
- ()24.指數函數 e^x 與對數函數 $\log x$ 互為反函數，則
 ① 這兩個圖形對 x -軸成對稱 ② 這兩個圖形對 y -軸成對稱
 ③ 這兩個函數同時是遞增函數 ④ 這兩個圖形對 $y=x$ 成對稱
- ()25.給定 f 為定義在實數軸上的實值連續函數，而且非常數函數，則 f 將區間 $[a, b]$ 映成 $[c, d]$ 。下列哪一個選項與此一命題的證明無關？
 ① f 將連通集映成連通集 ② 實數軸上的連通集為區間 ③ f 將緊緻集映成緊緻集 ④ f 的反函數存在
- ()26.函數 $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ 在閉區間 $[0, 2]$ 上的最小值是哪一个選項？
 ① -1 ② -2 ③ 0 ④ 1
- ()27.令函數 $f(x) = 4x + 2\ln x$ ，而 g 為 f 的反函數，求 $g'(4) = ?$
 ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{8}$
- ()28.將 $f(x) = \begin{vmatrix} x^2 - 1 & x + 4 & 2x \\ 2x + 3 & x - 5 & x^2 \\ x^2 + 2 & 2x^3 & x + 2 \end{vmatrix}$ 除以 $x^2 + x - 2$ 可得餘式 $g(x) = ax + b$ ，則
 ① $g(1) = 0$ ② $g(-1) = 0$ ③ $g(0) = 1$ ④ $g(0) = -1$

99 學年度中區六縣市政府教師甄選策略聯盟 國民中學數學科試題

()29. 若 $f(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$; $x \neq 0$, 則下列敘述何者正確?

- ① 若 $f(0) = 0$, 則 $f(x)$ 在 $x = 0$ 點為連續 ② 若 $f(0) = 1/2$, 則 $f(x)$ 在 $x = 0$ 點為連續
③ 若 $f(0) = 1$, 則 $f(x)$ 在 $x = 0$ 點為連續 ④ $f(0)$ 為任何值, $f(x)$ 在 $x = 0$ 不連續

()30. 若 $f(x)$ 在收斂區間 $I = \{x: x_0 - r < x < x_0 + r, r > 0\}$ 中可以展開成爲冪級數 $f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$, 則下列哪一個選項不成立?

- ① $f(x)$ 在 $x = x_0$ 可以展開成爲泰勒級數 ② $f'(x) = \sum_{n=1} a_n(x-x_0)^{n-1}$
③ $\int f(x)dx = \sum \int a_n(x-x_0)^n dx$ ④ $\sum a_n(x-x_0)^n$ 在 I 內不會絕對收斂

()31. $1-1+1-1+1\ldots$ 的和等於?

- ① 0 ② 1 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 以上皆非

()32. 已知斐波那契數列如下: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... , 其中 $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ 且 $a_0 = a_1 = 1$ 。則下列哪一選項不是事實?

- ① 數列 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 的極限爲 $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ② $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 稱爲黃金比 ③ 數列 a_n 不收斂 ④ 數列 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 遞增

()33. 冪級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ 的收斂區間是哪一個選項?

- ① $[-1, 1]$ ② $(-1, 1]$ ③ $(-1, 1)$ ④ $[-1, 1)$

()34. $x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!}$ 是下列哪一個函數的馬克勞林級數的前三項?

- ① $\cos x$ ② $\sin(x^2)$ ③ $\sin x$ ④ $\tan x$

()35. 級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = ?$

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{6}$

()36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}$ 的收斂半徑爲?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ $\sqrt{2}$

()37. 下列哪一個變換將平面上的平行線映射成另一個平面上的平行線?

- ① $T(x, y) = (2x+y, x-3y)$ ② $T(x, y) = (x^2, y)$ ③ $T(x, y) = (0, 3x+y^2)$ ④ $T(x, y) = (\sin x, \cos y)$

()38. 給定 $ad - bc > 0$, 變換 $T(x, y) = (ax+by, cx+dy)$, 則下列哪一個選項不成立?

- ① T 爲線性變換 ② T 將正方形映射成平行四邊形
③ $ad - bc$ 代表變換前後的面積伸縮率 ④ T 將直線映射成座標原點

()39. 設 e 、 f 是平面向量的一組基底, T 是一個線性變換。 $T(e) = 3e$ 、 $T(f) = e + 2f$, 則下列哪個向量是 T 的特徵向量(eigenvector)?

- ① f ② $e + f$ ③ $f - e$ ④ $f + 2e$

() 40. 下列哪一個選項等於 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \left(\sqrt{n + \frac{1}{2}} \right)$?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1

() 41. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x+1} (\sqrt{3x} - \sqrt{3x-1}) = ?$

- ① $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ② $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ ∞

() 42. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{x - \frac{\pi}{4}} \int_x^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan t} \, dt = ?$

- ① -1 ② 1 ③ 0 ④ 不存在

() 43. 下列哪一個選項代表不定積分 $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x} dx$?

- ① $\ln \tan x + C$ ② $\ln |\tan x| + C$ ③ $\tan x + C$ ④ $\sec x + C$

() 44. 設 $f(t) = \int_0^t 2x \cos(x^2) dx$, 則 $f'(t) = ?$ 請選出正確的選項。

- ① $\sin t$ ② $2t \cos t$ ③ $2t \cos(t^2)$ ④ $\sin(t^2)$

() 45. 求瑕積分 $\int_0^\infty \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} dx = ?$

- ① $\frac{\pi^2}{2}$ ② $\frac{\pi^2}{4}$ ③ $\frac{\pi^2}{6}$ ④ $\frac{\pi^2}{8}$

() 46. 下列何者為線性獨立?

- ① $(1, 2, -3, 1), (4, 0, 0, 2), (6, 4, -6, 4)$ in R^4 ② $(1, -2), (4, 1), (6, 6)$ in R^2
 ③ $(-2, 0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 2), (1, -1, 3, 3, 1)$ in R^5 ④ $(1, -6, 2), (-1, 4, -3), (1, 16, -7)$ in R^3

() 47. 下面哪一個選項中的矩陣代表平面上的鏡射?

- ① $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

() 48. 下面哪一個矩陣的秩(rank)等於 2?

- ① $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

() 49. A 、 B 是兩個 2×2 階的實係數，非零的矩陣，並且 $AB = 0$ 。下列哪一個選項中有關矩陣行列式的性質是正確的?

- ① A 的行列式不為 0 ② A 的行列式為 0 ③ B 的行列式不為 0 ④ $A+B$ 的行列式為 0

() 50. 兩個 2×2 階矩陣 A 和 B ， A 代表旋轉， B 代表鏡射， I 是單位矩陣，請選出正確的選項。

- ① B 的行列式為 1 ② AB 的行列式為 -1 ③ A 的行列式為 -1 ④ BA 的行列式為 1