桃園縣縣立高級中學 100 學年度現職教師聯合甄選筆試試題

科目：**數學**科

說明：本試卷共分選擇題與非選擇題兩部份。第壹部份：選擇題占50%，請用 2B 鉛筆，直接於「答案卡」上，依題號畫記作答，修正時應以橡皮擦拭乾淨，切勿使用修正液(帶)，答案卡因考生畫記不清、污損……等人為因素導致讀卡錯誤或不能讀卡，由考生自行負責不得有異議；第貳部份：非選擇題占50%，請使用黑色或藍色原子筆、鋼珠筆或中性筆，在「答案卷」上作答。於試題卷上作答者，不予計分。本試題卷連同答案卡、答案卷一併交回，違規攜出試場者以零分計算。

第壹部份：選擇題

一、單一選擇題：(共7題，占35分)

說明：第1至第7題為單一選擇題。每題請選出一個最適當的選項畫記於答案卡上。每題答對得5分，答錯倒扣1/4題分。

1. 計算 $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}$ 的值為？

(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) -2

2. 方程組 $\begin{cases} x+y+s=1 \\ 2x+y-t=2 \\ x\geqq 0, y\geqq 0, s\leqq 0, t\leqq 0 \end{cases}$，求在此方程組的條件限制下，$f(x,y)=5x+3y$的最大值為何？

(A) 3 (B) 5 (C) 6 (D)無窮大

3. 下列各無窮級數，何者為發散級數？

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ (C) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^n}$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty}\tan^{-1}\frac{1}{n^2+n+1}$

4. 設 $w=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$，$z_1=a+bw$，$z_2=(a+bw)[a-b(1+w)]$，$a,\ b$ 為實數，則下列關於z_1與z_2的關係何者正確？

(A) $z_1=z_2$ (B) $|z_1|=|z_2|$ (C) $|z_1|^2=z_2$ (D) $\overline{z_1}=z_2$

5. 求積分值 $\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\sqrt{9-x^2-y^2}\,dydx=$?

(A) 9π (B) 18π (C) 27π (D) 36π

6. 在坐標平面上，若動直線$x=k$與兩函數圖形$y=\cos x$和$y=\sin x$分別交於A、B兩點，則$\overline{AB}$的最大值為何？

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

7. 設 $A=\begin{bmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{bmatrix}$，$f(x)=\det(A)$，則方程式$f(x)=0$有多少個根？

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

二、多重選擇題：(共3題，占15分)

說明：第8至第10題為多重選擇題。每題各有5個選項，其中至少有一個是正確的，請於答案卡上畫記作答。每題5分，各選項獨立計分，每答對一個選項，可得1/5題分，每答錯一個選項，倒扣1/5題分，整題未作答者，不給分亦不扣分。

8. 解不等式$3\log_{\frac{1}{3}}x>\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)$，得x的範圍為$a<x<b$，則下列選項何者為真：

(A) $a<0.7$ (B) $a<0.6$ (C) $b=1$ (D) $b-a$大於1 (E) $b+a$大於$\frac{3}{2}$

9. 通過點(3,4)做一直線l，且此直線與座標軸相交圍成一個面積為12的三角形，令此直線的斜率為m，x截距為a，y截距為b，則下列敘述何者為真：

(A) m > 0 (B)不存在這樣的直線l (C) a + b < 1 (D) b < 3 (E) a > 3

10. 令$P=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$，則下列敘述何者為真：

(A) P是有理數 (B) P是大於1的實數 (C) P不是整數 (D) $P=1$ (E) 以上皆非。

第貳部份：非選擇題（共6題，占50分）

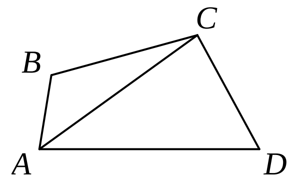
說明：作答時不必抄題，分為$\boxed{\text{A、B兩部份分頁書寫}}$。A部份包含填充題三題、計算題一題，B部份包含計算題二題，請將試題題號及答案依照順序寫在答案卷上。

$\boxed{\text{A部份}}$

一、填充題：（共3題，占15分）

1. 若一個十進位數a表示成n進位數為b，則記為b_n，例如十進位數8的7進位表示為11_7。若$56001_7\div 66_7$的商為a_7，2002422_7的平方根為b_7，則$(a, b)=$ ＿＿＿＿＿＿。

2. 如圖，平面上四邊形$ABCD$中，$\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=10$，$\overline{AD}=13$，$\cos\angle BAC=\dfrac{3}{5}$，向量內積$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=120$，設向量$\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，則$(x, y)=$ ＿＿＿＿＿＿。



3. 設直線L：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$在平面$E$：$x-y+2z-1=0$上的投影直線為 M ，將直線 M 繞 y 軸旋轉一周所成的曲面方程式為 ＿＿＿＿＿＿。

二、計算題：（共3題，占35分）

說明：不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在答案卷上。

4. 在坐標平面上，設$S=\left\{(x, y)\mid x^2+y^2\le 2x \text{ 且 } x\le y\right\}$，求區域$S$繞直線$x=2$旋轉一周所得的旋轉體體積。(10分)

$\boxed{\text{B部份}}$

5. 有人說：天下的烏鴉一般黑。就顏色而言，只要看到一隻黑色烏鴉，好像就可以推論之，小明說：”我可以用數學證明，所有烏鴉皆同一顏色”，他的證明如下：

令P(n)表n隻烏鴉皆是同一顏色的命題

(i) n=1時，由於只有一隻，P(1)成立；設n=k時，命題P(k)成立

(ii) n=k+1時，可將烏鴉編成1，2……，k，k+1號，利用P(k)成立條件，前k隻同一顏色，後k隻亦同一顏色，由於前k隻與後k隻有重覆，得k+1隻同一顏色，命題P(k+1)成立。

由數學歸納法得證所有烏鴉皆同一顏色

試問上述的證明是否正確？若不正確，請指出錯誤的地方，並說明理由。(10分)

6. 觀察 $C_0^n+C_1^n+\cdots+C_n^n=(C_0^n+C_3^n+C_6^n\cdots)+(C_1^n+C_4^n\cdots)+(C_2^n+C_5^n\cdots)$

令 $A=C_0^{3k}+C_3^{3k}+\cdots+C_{3k}^{3k}$，$B=C_1^{3k}+C_4^{3k}+\cdots+C_{3k-2}^{3k}$，$k\in N$

(1) 比較A與B的大小關係。(8分)

(2) 計算A值。(7分)