100 學年度家齊女中教師甄試數學科試題

1.若 X 的動差生成函數（moment generating function）是 $M(t)=\frac{2}{7}e^{t}+\frac{1}{7}e^{2t}+\frac{3}{7}e^{3t}+\frac{1}{7}e^{4t}$ 則求 X 的期望值及變異數分別為______。【100.家齊女中 ★☆☆】

【解】：

$$E(X)=\frac{2}{7}\times1+\frac{1}{7}\times2+\frac{3}{7}\times3+\frac{1}{7}\times4=\frac{17}{7}$$

$$E(X^2)=\frac{2}{7}\times1^2+\frac{1}{7}\times2^2+\frac{3}{7}\times3^2+\frac{1}{7}\times4^2=7$$

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=7-(\frac{17}{7})^2=\frac{54}{49}$$

2.解不等式 $(x-1)(x-2)^4(x-3)^3(2x^2+4x+5)\le 0$，求 x 的範圍為______。【100.家齊女中 ☆☆☆】

【解】：

因為 $2x^2+4x+5$ 恆為正數，

$(x-2)^4\ge 0$，所以 $x=2$ 時不等式成立…(1)

故原不等式可兩邊同時除掉 $(x-2)^4(2x^2+4x+5)$

得 $(x-1)(x-3)^3\le 0$，所以 $1\le x\le 3$ …(2)

合併(1)(2)的結果可得知 x 的範圍為 $1\le x\le 3$

3.設實數 x, y, z 滿足 $x^2+y^2+z^2=16$，求 $2x+3y-6z$ 的最大值及最小值分別為______。【100.家齊女中 ☆☆☆】

【解】：

由柯西不等式可得知 $(x^2+y^2+z^2)(2^2+3^2+(-6)^2)\ge(2x+3y-6z)^2$

$\Rightarrow -28\le 2x+3y-6z\le 28$

∴最大值為 28，最小值為 -28

4.已知雙曲線方程式為 $2x^2-y^2=4$，求斜率為 2 的切線方程式為________。【100.家齊女中 ★☆☆】

【解】：

若雙曲線方程式為 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，且切線斜率為 m 時，則所求切線方程式的公式為

$L: y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$

所以 $2x^2-y^2=4\Rightarrow\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$，所以所求切線為 $y=2x\pm2$