100 學年度家齊女中教師甄試數學科試題

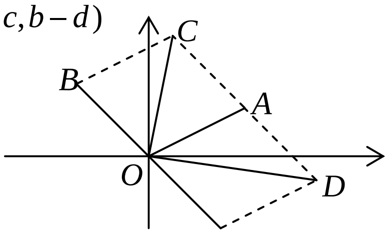
7.設 $z_1, z_2 \in C$ ，$|z_1| = |z_1 + z_2| = 3$，$|z_1 - z_2| = 3\sqrt{3}$ ，則 $\log_3|(z_1\overline{z_2})^{2000} + (\overline{z_1}z_2)^{2000}| =$ ______ 。【100.家齊女中　★★★】

【解】：

令 $z_1 = a + bi = 3(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ， $z_2 = c + di = r(\cos\beta + i\sin\beta)$ ，假設 $\alpha < \beta$

z_1 代表的點坐標 A(a,b)，z_2 代表的點坐標為 B(c,d)，

$z_1 + z_2$ 代表的點坐標 $C(a+c, b+d)$ ， $z_1 - z_2$ 代表的點坐標 $C(a-c, b-d)$



如右圖所示：$\overline{OA} = \overline{OC} = 3$，$\overline{AC} = \overline{AD} = x$ ，$\overline{OD} = 3\sqrt{3}$

由中線定理可知 $3^2 + (3\sqrt{3})^2 = 2(3^2 + x^2) \Rightarrow x = 3$

則可推論出 $\angle AOC = \dfrac{\pi}{3}$ ， $\angle AOD = \dfrac{\pi}{6}$ ，故 $\angle BOA = 120^\circ = \beta - \alpha$

$$z_1\overline{z_2} = 3r(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta) = 9[\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\cos(-\frac{2\pi}{3})]$$

$$\overline{z_1}z_2 = 3r(\cos\alpha - i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = 9[(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}]$$

$$\log_3|(z_1\overline{z_2})^{2000} + (\overline{z_1}z_2)^{2000}|$$

$$= \log_3|9^{2000}(\cos\frac{-4000\pi}{3} + i\sin\frac{-4000\pi}{3}) + 9^{2000}(\cos\frac{4000\pi}{3} + i\sin\frac{4000\pi}{3})|$$

$$= \log_3|9^{2000}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) + 9^{2000}(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})| = \log_3 3^{4000} = 4000$$

11.試求滿足 $p^3 + 2p^2 + p$ 恰有 42 個正因數這個條件的最小數 p 為多少？【100.家齊女中　★☆☆】

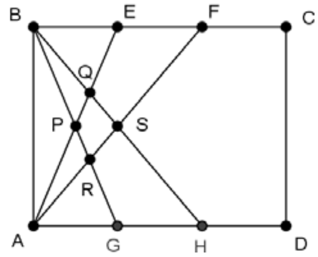
【解】：

若 $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot \ldots \cdot p_t^{k_t}$ ，則 n 的正因數個數為 $(k_1+1)\cdot(k_2+1)\cdot(k_3+1)\cdot\ldots\cdot(k_t+1)$

所以 $p^3 + 2p^2 + p = p(p+1)^2$ ，又 $42 = 2\times3\times7 = (1+1)(2+1)(6+1)$

故最小值的 $(p+1)^2 = 2^6\cdot3^2 \Rightarrow p+1 = 2^3\cdot3 \Rightarrow p = 23$

12.在矩形 ABCD 中，G、H 為 $\overline{AD}$ 的三等分點，E、F 為 $\overline{BC}$ 的三等分點，若 $\overline{AB}=36$，$\overline{BC}=45$，試求四邊形 PQRS 的面積。【100.家齊女中　★☆☆】



【解】:

將各點坐標化，令 $A(0,0)$，$G(15,0)$，$H(30,0)$，$B(0,36)$，$E(15,36)$，$F(30,36)$

ABEG、ABFH 為長方形，所以 $P(\frac{15}{2},18)$，$S(15,18)$

Q 為 ΔABF 的重心，$\therefore Q(\frac{0+0+30}{3},\frac{0+36+36}{3})\Rightarrow Q(10,24)$

R 為 ΔABH 的重心，$\therefore Q(\frac{0+0+30}{3},\frac{0+36+0}{3})\Rightarrow R(10,12)$

所以 PQRS 為一鳶形，所以面積為 $=\frac{1}{2}\cdot\overline{PS}\cdot\overline{QR}=\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{2}\cdot 12=45$