100學年度慈濟教育志業體中學教師聯合甄選數學科試題卷

作答說明：
1. 試題共兩頁，作答時請依序標明題號，不需抄題。
2. 本試題分為兩部份：填充題、計算與證明題。
3. 填充題可不需列出計算過程，計算與證明題請詳列演算過程或說明。
4. 不得自行攜帶計算紙張或使用計算機等電子產品。

填充題：(每題5分，共75分)

1. 解不等式$|x|^3-2x^2-4|x|+3<0$。

2. 解聯立方程組$\begin{cases} xy+x+y=-5 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$。

3. 在空間坐標系中有一直線$L:\begin{cases} x=0 \\ y+z=1 \end{cases}$及一球面$S:x^2+y^2+z^2=25$，今以z軸為中心軸，將直線L繞z軸旋轉一圈之後，直線與球面相交出兩個圓。若小圓面積為A_1，大圓面積為A_2，求$\dfrac{A_1}{A_2}=$？

4. 有一個八個頭的外星人，他的每一個頭都有專屬的口罩與安全帽，今天外星人欲騎車出門，想為自己的八個頭戴上專屬口罩與安全帽，若規定每一個頭必須先戴上口罩才能戴上安全帽，試問這個外星人共有多少種不同次序的戴法？(答案若有P_n^m或C_n^m，請務必化簡；答案若有階乘或指數型態，可以不需化簡。)

5. 已知$\left(1+x+x^2\right)^{1000}$的展開式為$a_0+a_1x+......+a_{2000}x^{2000}$，試求$a_0+a_3+a_6+......+a_{1998}=$？

6. 用7個〝+〞號及5個〝−〞號排成一列，恰有4次變號的排法有多少種？

7. 考慮一個正四面體與其內切球與外接球。今在正四面體之四個面，均有一個最大球與其相切也和外接球相切(此球在正四面體外部)。若在外接球的內部任取一個點P，則P不落在內切球內部也不落在正四面體外圍的四個球內之機率為何？

8. 有一個大正立方體由27個單位立方體所組成，今有一個平面垂直且平分大正立方體內部之對角線，試問該平面與幾個單位立方體相交？

9. 若函數f滿足$f(93)=93$，且對每一正整數n，$f(n)+f(n+3)=n^2$恆成立，則$f(30)=$？

10. 已知 A 袋中有 3 個 10 元硬幣，B 袋中有 2 個 5 元硬幣。今從 A 袋中任取一個硬幣放入 B 袋，再由 B 袋中任取一個硬幣放入 A 袋。若進行的次數夠多，試問 A 袋中有 2 個 10 元硬幣和 1 個 5 元硬幣的機率會趨近於何值？

11. 若 $\log_4(x+2y)+\log_4(x-2y)=1$，則 $|x|-|y|$ 之最小值為何？

12. x、y 為實數，已知 $x^2+xy+y^2=3x+3y+9$，若 x^2+y^2 的最大值為 M，最小值為 N。求數對 $(M,N)=$？

13. 已知 $f(x)=\left|\frac{1}{4}x^2-x[x]\right|$，求 $f'\left(\frac{3}{2}\right)=$?

14. 試求 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+n)\sqrt{2kn+k^2}}{n^3}$ 之值。

15. 試求不定積分 $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$。

計算與證明題：(共 25 分)

1. 【True or False：若該小題為真，寫〝T〞，並請簡要說明、解釋；若該小題為假，寫〝F〞，並請簡要說明或舉反例。每小題 3 分，未做說明者該小題不給分，共 15 分】

若 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 為實係數多項式，試回答下列各小題：

(A) $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸至少交於一點

(B) $y=f(x)$ 的圖形與任一個拋物線 $y=a'x^2+b'x+c'$ 必相交

(C) 若 $\frac{4}{3}$ 為 $f(x)=0$ 的一根，則 $3|a$ 且 $4|d$

(D) 若 $f(x)=0$ 有一實根 0 及兩個虛根，則 $a\times c>0$

(E) 若 $f(2)\times f(3)>0$，則 $f(x)=0$ 在 2 與 3 之間可能有實根。

2. 空間中有三向量 $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$、$\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$、$\bar{c}=(c_1,c_2,c_3)$ 且此三向量兩兩不平行，試證明 $\bar{a}$、$\bar{b}$、$\bar{c}$ 在空間中所形成之平行六面體的體積為 $\left|\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}\right|$。(10 分)