臺北市立中正高級中學100學年度第2次專任教師甄試數學科筆試試題卷

一、填充題：(每格5分，共60分)

說明：請將答案化簡後，填入答案卷中的指定位置。

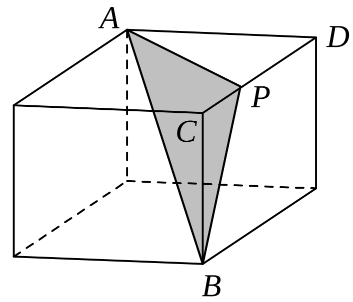
1. 設ΔABC三邊長為a，b，c，且$\dfrac{b}{c-a}-\dfrac{a}{c+b}=1$，則$\Delta ABC$的最大角為__________度。

2. 設a為不大於200的自然數，若三次方程式$x^3-x^2+a=0$有整數根，則a的最大可能值為__________。

3. 設$a\in\mathbb{R}$，求拋物線$y=x^2+(a+2)x-2a+1$頂點的軌跡方程式為__________。

4. 已知$n\in\mathbb{N}$，設方程式$x^2+(\frac{1}{2}n+1)x+(n^2-2)=0$的兩根為$\alpha_n$，$\beta_n$，則$\dfrac{1}{(\alpha_3+2)(\beta_3+2)}+\dfrac{1}{(\alpha_4+2)(\beta_4+2)}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(\alpha_{2011}+2)(\beta_{2011}+2)}=$__________。

5. 右圖是一個長方體，其中$\overline{AD}=1$，$\overline{CD}=2$，$\overline{BC}=2$，點P是$\overline{CD}$上的動點，當$\overline{CP}=x$時，ΔPAB之面積最小，其最小面積為y平方單位，則y之值為__________。



6. 若P_{1340}^{2010}必為3^k的倍數，則k的最大值為__________。

   （其中$P_m^n=\dfrac{n!}{(n-m)!}$，n、m均為自然數。）

7. 設$ABCDEFGHI$為一正九邊形，邊長為10，則$\overline{AC}^2-\overline{AB}\cdot\overline{AD}=$__________。

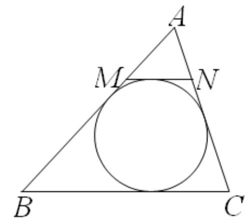
8. 數列$\langle a_n\rangle$中，$a_1=6$，且$a_n-a_{n-1}=\dfrac{a_{n-1}}{n}+n+1$($n\in\mathbb{N}$，$n\geq 2$)，則這個數列的一般項$a_n$為__________。

9. 設$a\in\mathbb{R}$，若$n\leq a<n+1$，則$[a]=n$。令$f(x)$表$\left[\sqrt[m]{x}\right]=2$的最大$m$值，$m\in\mathbb{N}$，則$\displaystyle\sum_{k=100}^{2011}f(k)=$__________。

10. 令$s=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{10000}}$，若$n\leq\dfrac{s}{10}<n+1$，其中$n$為自然數，則$n=$__________。

11. 設$n=2012$，則$\dfrac{1}{2^n}(1-3C_2^n+3^2C_4^n-3^3C_6^n+\cdots-3^{1005}C_{2010}^n+3^{1006}C_{2012}^n)=$__________。

12. 如右圖，已知ΔABC的周長為 s，在$\overline{AB}$, $\overline{AC}$上分別取點 M, N，使得$\overline{MN}//\overline{BC}$，且$\overline{MN}$與$\Delta ABC$的內切圓相切，則$\overline{MN}$的最大值為__________。



二、計算證明題：(每題 10 分，共 40 分)

說明：請將作答過程書寫於答案卷中的指定位置，並標示清楚答案。

1. 下列表中的對數值有兩個是錯誤的，請予以訂正。

x	**0.021**	**0.27**	**1.5**	**2.8**
$\log x$	$2a+b+c-3$	$6a-3b-2$	$3a-b+c$	$1-2a+2b-c$
x	**3**	**5**	**6**	**7**
$\log x$	$2a-b$	$a+c$	$1+a-b-c$	$2(b+c)$
x	**8**	**9**	**14**	
$\log x$	$3-3a-3c$	$4a-2b$	$1-a+2b$	

2. 兩同心圓的圓心 O，過小圓上一定點 P，作小圓的弦$\overline{PA}$，大圓的弦$\overline{BC}$，使$\overline{PA}\perp\overline{BC}$於 P。求證：$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$為定值。

3. 若 n 為自然數，求證$C_0^{2n}\cdot 3^n+C_2^{2n-2}\cdot 3^{n-1}+C_4^{2n-4}\cdot 3^{n-2}+\cdots+C_{2k}^{2n-2k}\cdot 3^{n-k}+\cdots+C_{2n}^{2n}$恆為$2^n$的倍數。

4. 直角ΔABC中，$\angle C$是直角，設ΔABC的內切圓 O 交$\overline{AB}$於 D，r 為內切圓 O 的半徑，$\overline{AB}=c$，求證：

(1) $r=\dfrac{c}{\cot\dfrac{A}{2}+\cot(45^\circ-\dfrac{A}{2})}$。 (2) $r\le\dfrac{c}{2}(\sqrt{2}-1)$。

臺北市立中正高級中學100學年度第2次專任教師甄試

數學科筆試答案卷

一、填充題：(每格5分，共60分)

1. 120	2. 150	3. $y=-x^2+4x+5$	4. $\frac{2009}{4022}$
5. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$	6. 670	7. 100	8. n^2+3n+2
9. 17600	10. 19	11. $-\frac{1}{2}$	12. $\frac{s}{8}$