資優 1

1.

已知「$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$」。
若正整數 x、y 滿足「$97\times85=x^2+y^2$」，則 $x+y$ 的最大值為 **(4)** 。

ANS：127

2.

在 ΔABC 中，A 點的坐標為 $(4,-1)$，$\angle B$、$\angle C$ 的內角分角線分別為 $x=1$、$x-y-1=0$，求直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 的方程式為 **(9)** 。

ANS: 2x-y+3=0

3.

設 $(a+\sqrt{a^2+9})(b+\sqrt{b^2+5})=12$，求 $a\sqrt{b^2+5}+b\sqrt{a^2+9}$ 的值＝ **(12)** 。

ANS: 33/8

4.

若 x 為整數，且 $9x^2+23x-2$ 可分解成兩個連續正偶數的乘積，求 x＝ **(13)** 。

ANS; 2 或-17

5.

將數列 $<3n-2>$， $n=1,2,3...$ 分組如下：{1}，{4,7}，{10,13,16,19}，{22,25,28,31,34,37,40,43}，{46,49,52,55,58,61,64,67,70,73,76,79,82,85,88,91}，…其中第 n 組有 2^{n-1} 個數， $n=1,2,3...$ ，且第 n 組中所有數的總和等於 $a\cdot2^{2n-3}+b\cdot2^{n-2},\ a,b\in Z$ ，則數對 $(a,b)=$ ____________

ANS：(9,-7)

6.

已知 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ，若 $1+2\omega+(2\omega)^2+(2\omega)^3+...+(2\omega)^{99}=a+b\omega$ ，其中 $a,b\in R$ ，

則 a 是____________位數（$\log2\approx0.3010,\ \log3\approx0.4771,\ \log7\approx0.8451$）

ANS：30

7.

已知c爲一實數，使方程式$x^3+(3-c)x^2+(11-c)x+9=0$恰好有一實根，則c的範圍____________

ANS：-4<c<8

8.

求方程式$\sqrt[3]{(5+x)^2}+\sqrt[3]{(-2+x)^2}=\sqrt[3]{(5+x)(2-x)}+7$的根__________

ANS：$-6\sqrt{3}$

9.

試求實數a的範圍，使得對每一個實數x都滿足$\log_a\dfrac{2x^2+ax+3}{x^2+x+2}\le\log_a 3$

____

ANS：$1<a<2\sqrt{6}$

10.

若$k\in R$，且不等式$2|x-1|-3|x+3|\le k$對每一個實數x恆成立，則k的最小值爲

____

ANS：8

11.

有一個二位數，其十位數字比個位數字小，並且個位數字非零。十位數字與個位數字的乘積可以被十位數字與個位數字的和整除。則這個二位數爲 ___④___ 。

ANS ：36

12.

設a,b,c爲正實數，$a+b+c=7$且 $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}=\dfrac{10}{7}$ 。則$\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}$之值爲 ___⑥___ 。

ANS：7

13.

求$\sqrt{2007\times2008\times2009\times2010+1}$之值= ___⑧___ 。

ANS：4034071

14.

1　2　3　4　…　97　98　99　100

3　5　7　…　195　197　199

8　12　…　392　396

20　…　788

⋱　…　⋰

⋱　…　⋰

K

已知一個排列如三角形狀的數列如上所示：其中第一列各數依次爲 1, 2, 3, …, 100。從第二列起，每個數分別爲上一列的左與右兩數的和,若此三角形最下方的數字爲 K。

觀察:

1　2　3　4　→　1+4= 5

3　5　7　→　3+7=10

8　12　→　8+12=20

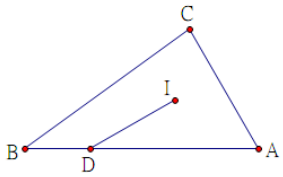
20　→　20

若 K 可表示成 $2^M \times N$,其中 M 爲正整數, N 爲奇數,試求數對$(M\ ,N\ )$=＿⑪＿。

ANS：(98,101)

15.

如(圖一)，ΔABC 中，$\overline{CB} > \overline{CA}$，$D$ 爲 $\overline{AB}$ 上一點，滿足 $\overline{CB}-\overline{CA}=\overline{BD}$，$I$ 爲 ΔABC 三條內角平分線的交點，若 $\overline{ID}=8\sqrt{3}$,則 $\overline{IA}$ =＿⑫＿。



ANS： $8\sqrt{3}$

16.

如果 a,b,c,d,e 都是正整數，請算出下列各未知數。

(1) 若 $365=a^2+b^2$，試問數對 (a,b)=?(4 分)

(2) 若 $365=c^2+d^2+e^2$，試問數對 (c,d,e)=?(8 分)

根據前兩小題所找出的答案，找出符合下列式子的正整數 m,n，其中 m 爲二位數，n 爲個位數。

(3) 若 $\dfrac{m^2+(m+1)^2+(m+2)^2+(m+3)^2+(m+4)^2}{365}=n$，試問數對 (m,n)=?(3 分)

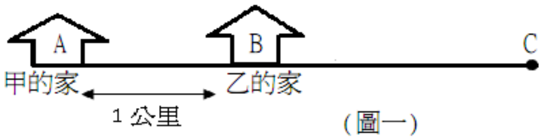
ANS：(1)(19,2)(14,13)　(2)(18,5,4)(16,10,3)(14,12,5)(12,11,10)　(3)(10,2)

17.

甲、乙兩人的家相距 1 公里，如(圖一)所示，他們的朋友相約在下午 6:00 要在甲的家 A 點烤肉，甲打電話向乙借烤肉架，並於下午 5：15 出門以每小時 5 公里的速度朝乙的家 B 點的方向行走，而乙則一個人抬著烤肉架於下午 5：00 出門，但卻走錯方向，朝 C 點的方向行走，直到甲在 C 點追上乙時，兩人才以每小時 4 公里的速度折返，兩人合力抬烤肉架而準時在下午 6：00 回到甲的家 A。

試問：(1)B 到 C 距離為____⑦____公里。

(2)乙一個人抬烤肉架由 B 走到 C 的速度為每小時____⑧____公里。



(圖一)

ANS：(1) 2/3　(2) 8/7

18.

有一個整數 n 是從 1~96 隨機選出來，包含 1 跟 96，求 n(n+1)(n+2)可以被 8 除盡的機率為____________。

ANS：5/8